はじめに

◎様々な単元から出題されるので幅広い学習が必要である。
◎難易度は易〜難まで幅広く出題されるので, 出題された3問のうち、解きやすい問題がどれかを見極めて、60分の試験時間を有効に使うようにしよう。
◎教科書傍用問題集などで、標準レベルの問題までを確実に解けるようにして, 解ける問題で確実に得点を積み重ねよう。
◎計算量が多い問題もよく出題されるので, 上手に計算する力もつけておこう。
◎マーク形式だからと, 雑な解答, 計算をしていると見直しが難しくなるので, 途中経過がわかる解答をしておこう。
◎過去問をできるだけ多く解いて, 近畿大学の出題傾向に慣れておこう。

> 理工学部（生命化学以外) は数 III も出題範囲である。
> 推薦入試は「平面上の曲線と複素数平面、極限、微分法」
> 一般入試は「平面上の曲線と複素数平面、極限、微分法、積分法」

2次関数, 3次関数, 三角関数, 指数対数関数

●三角関数

◎三角関数の加法定理は確実に覚えておくこと。
過去には3倍角の公式をそのまま問う問題も出題されている。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad (\text{複号同順})$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad (\text{複号同順})$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad (\text{複号同順})$$

倍角

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 2\cos^2\theta - 1 \\ 1 - 2\sin^2\theta \end{cases}, \quad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

3倍角

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

半角

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

●対数関数

$$\begin{cases} \log_a MN = \log_a M + \log_a N \\ \log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^r = r\log_a M \\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \\ a^{\log_a b} = b \end{cases}$$

積分法

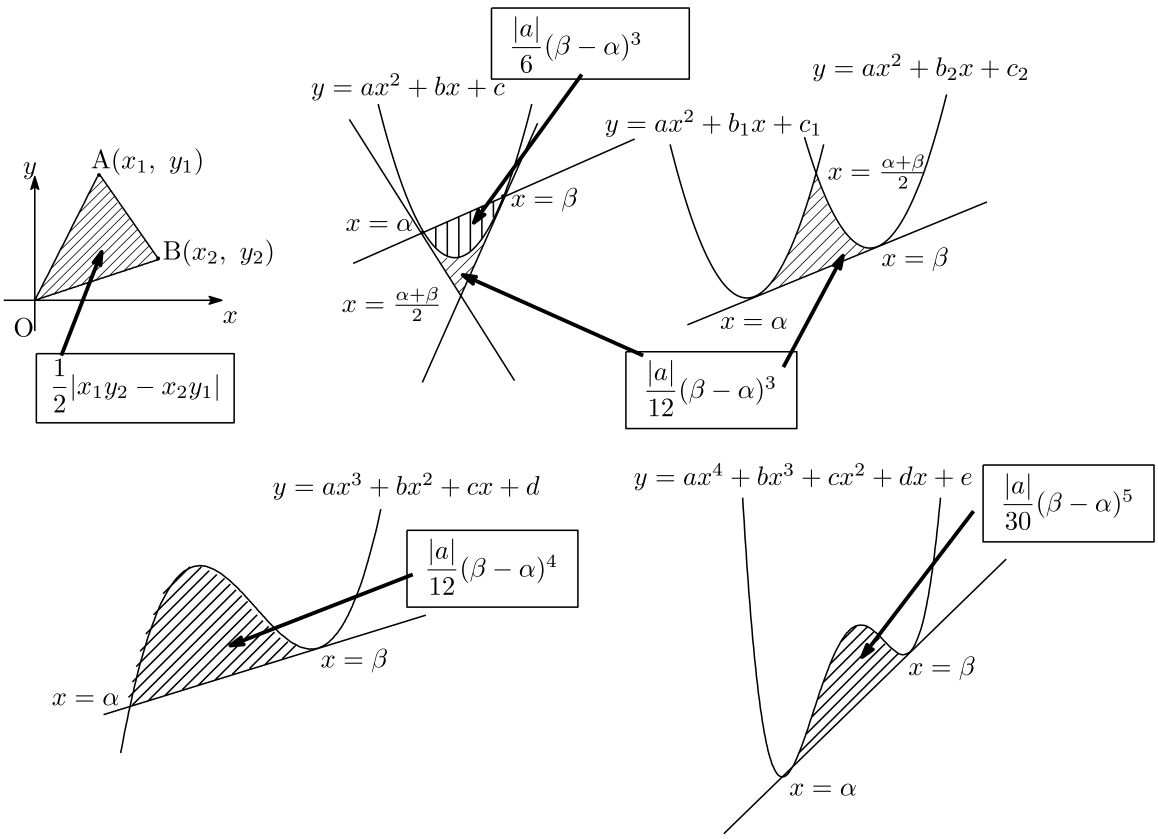
● 面積

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\ dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\
\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \\
\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{cases}
$$

≪ポイント≫

$ax^2+bx+c=0$ の解が $\alpha,\ \beta\quad(\alpha<\beta)$ のとき

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\ dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$



図形と式

● 円の方程式, 点と直線の距離, 領域と最大値・最小値

要領よく計算する力が要求される問題が多い。領域を扱ったり、図形を動かす問題にも要注意。

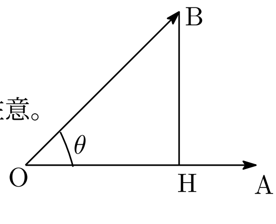
ベクトル

● 平面ベクトル, 空間ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\theta\quad\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし, 点 B から直線 OA に下ろした垂線の足を H とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

三角形の外心を求める問題においてこの内容が出題されているので要注意。



場合の数と確率

● 確率だけでなく, 直線, 2 次関数や図形問題との融合が多いのも特徴である。
立式して計算で求める問題も出題されるが, 丁寧に数え上げていく問題も多い。

数列

● 漸化式・群数列
２項間だけでなく３項間の漸化式まで、様々な形の漸化式に慣れておきたい。
過去には漸化式を解いても、周期性に気づかなければ解答出来ない問題が出題された。
また, ほとんど誘導なしで漸化式を作る問題も出題されたこともあるので, その問題に応じて、柔軟な解法を見つける必要がある。

整数問題

● 余りに関する問題、約数に関する問題に要注意
● n 進法にも慣れておこう。

数と式

● 対称式, 絶対値, ガウス記号など
ガウス記号: $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$[x]=n \text{ のとき, } n \leqq x < n+1 \quad (n \text{ は整数})$$

である。　ガウス記号は慣れていないと扱いが難しいので十分に練習をしておこう。

空間図形

● 多面体
正多面体（正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体）やその他の多面体についても、辺の数や頂点の個数を数えられるようにしておこう。

複素数平面

● $a,\ b$ は実数とする。
複素数 $z=a+bi$ の共役複素数は $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ である。

$$z \text{ の実部 } Re(z)=a=\frac{z+\overline{z}}{2}, \quad z \text{ の虚部 } Im(z)=b=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$
$$|z|^2=z\overline{z}=a^2+b^2, \quad |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

また,

$$z \text{ が実数} \quad \Leftrightarrow \quad z=\overline{z} \quad z \text{ が純虚数} \quad \Leftrightarrow \quad z=-\overline{z} \quad (z \fallingdotseq 0)$$

である。
● 極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (r>0)$

$$z \text{ の大きさ } |z|=r, \quad z \text{ の偏角 } arg(z)=\theta+2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

$$\begin{aligned} z=a+bi \quad &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &\text{ただし,} \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ である。} \end{aligned}$$

また, ド・モアブルの定理

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \text{ は整数})$$

が成り立つ。

● $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ であるとき,

$$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\therefore |z_1z_2| = |z_1||z_2|, \quad arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

が成り立つ。

● β は O を中心に α を θ 回転して r 倍した点であるとき,

$$\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta)\alpha$$

である。

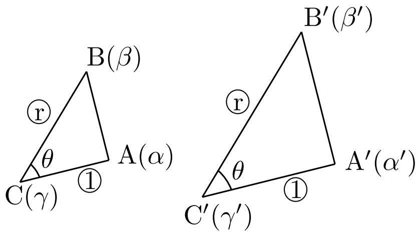
β は γ を中心に α を θ 回転して r 倍した点であるとき,

$$\beta - \gamma = r(\cos\theta + i\sin\theta)(\alpha - \gamma)$$

である。

A(α), B$(\beta\ )$, C(γ), A$'(\alpha')$, B$'(\beta'\ )$, C$'(\gamma')$ について,

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} = \frac{\beta'-\gamma'}{\alpha'-\gamma'} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



が成り立つとき, $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$A$'$B$'$C$'$ が成り立つ。

● 2 つの複素数 z_1 と z_2 との距離は $|z_1 - z_2|$ と表される。

したがって,

$\boldsymbol{|z-\alpha| = |z-\beta|}$ をみたす z は 2 点 α, β からの距離が等しい点の軌跡より,

A(α), B(β) とすると, z は線分 AB の垂直二等分線を表す。

$\boldsymbol{|z-\alpha| = r}$ をみたす z は中心 α 半径 r の円周上にある。

$z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + c = 0$ (c は実数の定数)

の式が与えられた場合は,

$$(z-\alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = -c + \alpha\overline{\alpha}$$

と変形し, 左辺を $-c + \alpha\overline{\alpha} = r^2 \quad (r > 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2 \\
&(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)} = r^2 \\
&|z-\alpha|^2 = r^2 \\
&|z-\alpha| = r
\end{aligned}$$

となり, 円を表す。

● n は自然数とする。

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

この因数分解は方程式 $z^n = 1$ の解について考えるときに用いるので、覚えておくこと。

[**第 1 問**]

令和 3 年度 生物理工・工 (2020.11.21 実施) 第 3 問

座標空間の 4 点 A(2, 1, 0), B(−2, 0, 1), C(1, 0, 4), D(−1, 7, 3) を頂点とする四面体 ABCD がある。三角形 ABC の重心を G とする。

(1) 辺 AB の長さは $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり, $\angle\text{ABC} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

また, 三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2) 線分 DG の長さは $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ であり, $\angle\text{CGD} = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である。

(3) 四面体 ABCD の体積は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(4) 三角形 ABD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(5) 辺 AB の中点を M とし, 線分 DG 上の点 E から直線 DM に垂線 EF を下ろす。線分 EF と線分 EG の長さが等しいとき, その長さは

$$\frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

[**解答**]

(1) $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OA}} = (-4,\ -1,\ 1)$ より $\text{AB} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = \boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}$

$\overrightarrow{\text{BA}} = (4,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{OC}} - \overrightarrow{\text{OB}} = (3,\ 0,\ 3)$,

$\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 12 + 0 - 3 = 9$, $\left|\overrightarrow{\text{BC}}\right| = 3\sqrt{2}$ であるから,

$$\cos\angle\text{ABC} = \frac{\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}}{|\overrightarrow{\text{BA}}||\overrightarrow{\text{BC}}|} = \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

したがって, $\angle\text{ABC} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\pi$ である。

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\text{BA}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\text{BC}}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\boxed{\mathbf{9}}\sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}}{\boxed{\mathbf{2}}}$$

(2) 三角形 ABC の重心 G は

$$\overrightarrow{\text{OG}} = \frac{\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OC}}}{3} = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

であるから,

$$\overrightarrow{\text{DG}} = \overrightarrow{\text{OG}} - \overrightarrow{\text{OD}} = \left(\frac{4}{3},\ -\frac{20}{3},\ -\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}(1,\ -5,\ -1)$$

したがって, $\mathrm{DG}=\dfrac{4}{3}\sqrt{1+25+1}=\boxed{\mathbf{4}}\sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\dfrac{4}{3}(-1,\ 5,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)=\dfrac{1}{3}(2,\ -1,\ 7)$

$\overrightarrow{\mathrm{GD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\dfrac{4}{9}(-2-5+7)=0$ したがって, $\angle\mathrm{CGD}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\pi$ である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{3}(1,\ -5,\ -1)\cdot(-4,\ -1,\ 1)=\dfrac{4}{3}(-4+5-1)=0$ より, $\mathrm{DG}\perp\mathrm{AB}$

(2) より, $\mathrm{DG}\perp\mathrm{CG}$ であるから, $\mathrm{DG}\perp$ 平面 ABC である。

したがって, 四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot 4\sqrt{3}=\boxed{18}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 6,\ 3)=3(-1,\ 2,\ 1)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=9(1+4+1)=9\cdot 6$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=12-6+3=9$

したがって三角形 ABD の面積は

≪ポイント≫
三角形 OAB の面積
$\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)^2}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{18\cdot 9\cdot 6-9^2}}_{\text{共通因数でくくろう}}=\frac{9}{2}\sqrt{12-1}=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{2}}$$

(5) AB の中点 $\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{7}{6}\right)=\dfrac{1}{6}(2,\ -1,\ 7)$

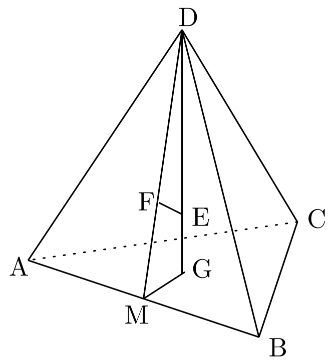
$\left|\overrightarrow{\mathrm{MG}}\right|=\dfrac{1}{6}\sqrt{4+1+49}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(1,\ -\dfrac{13}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right|=\sqrt{1+\dfrac{169}{4}+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{3\sqrt{22}}{2}$

$\mathrm{EF}=\mathrm{EG}=x$ とする。$\triangle\mathrm{DFE}\backsim\triangle\mathrm{DGM}$ であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{FE}:\mathrm{MG}=\mathrm{DE}:\mathrm{DM}\\&x:\frac{\sqrt{6}}{2}=4\sqrt{3}-x:\frac{3\sqrt{22}}{2}\\&\frac{3\sqrt{22}}{2}x=6\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}x\\&\frac{3\sqrt{22}+\sqrt{6}}{2}x=6\sqrt{2}\\&x=\frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{22}+\sqrt{6}}=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{11}}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{8}}\end{aligned}$$



[第 2 問]

令和 3 年度 生物理工・工 (2021.11.22 実施) 第 3 問

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2^{n^2-9n+15} \cdot a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\log_2 a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $\log_2 a_3 = \boxed{\text{イ}}$, $\log_2 a_4 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) すべての自然数 n について,

$$\log_2 a_n = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} n^3 - \boxed{\text{カ}} n^2 + \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} n - \boxed{\text{コサ}}$$

となる。

(3) a_n の値が最も小さくなるのは $n = \boxed{\text{シ}}$ のときであり, このとき

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$$

である。

(4) a_n の値が 1 未満となるような n のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{チ}} \leqq n \leqq \boxed{\text{ツ}}$$

である。

[解答]

(1) $a_2 = 2^{1-9+15} a_1 = 2^7$ より, $\log_2 a_2 = \boxed{7}$

$a_3 = 2^{4-18+15} a_2 = 2 \cdot 2^7 = 2^8$ より, $\log_2 a_2 = \boxed{8}$

$a_4 = 2^{9-27+15} a_3 = 2^{-3} \cdot 2^8 = 2^5$ より, $\log_2 a_2 = \boxed{5}$

(2) $a_{n+1} = 2^{n^2-9n+15} \cdot a_n$ の両辺, 底 2 の対数をとると, $\log_2 a_{n+1} = (n^2 - 9n + 15) + \log_2 a_n$

$b_n = \log_2 a_n$ とおくと, $b_1 = \log_2 a_1 = 0$

$b_{n+1} - b_n = n^2 - 9n + 15$ であるから,

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 9k + 15) \\
&= \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - \frac{9}{2} n(n-1) + 15(n-1) \\
&= \frac{1}{6}(n-1)(2n^2 - 28n + 90) \\
&= \frac{1}{3}(n-1)(n^2 - 14n + 45) \\
&= \frac{1}{3}(n^3 - 15n^2 + 59n - 45) \\
&= \frac{1}{3} n^3 - 5n^2 + \frac{59}{3} n - 15 \quad (n = 1 \text{ のときも満たす})
\end{aligned}$$

≪ポイント≫
$b_n = a_{n+1} - a_n$
$n \geqq 2$ のとき
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
本問では $c_n = b_{n+1} - b_n$ の形なので注意。

したがって,

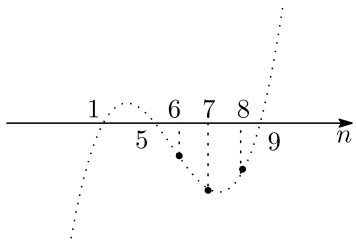
$$b_n = \log_2 a_n = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}n^3 - \boxed{5}\,n^2 + \frac{\boxed{59}}{\boxed{3}}n - \boxed{15}$$

(3)

$$\log_2 a_n = \frac{1}{3}(n-1)(n^2-14n+45) = \frac{1}{3}(n-1)(n-5)(n-9)$$

であるから, $n = 1, 2, 3, \cdots$ において, $\log_2 a_n < 0$ となるのは, $n = 6, 7, 8$ のときである。

$$\log_2 a_6 = \frac{1}{3}\cdot 5\cdot 1\cdot(-3) = -5,$$
$$\log_2 a_7 = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 2\cdot(-2) = -8,$$
$$\log_2 a_8 = \frac{1}{3}\cdot 7\cdot 3\cdot(-1) = -7$$



したがって, a_n の値が最も小さくなるのは, $n = \boxed{7}$ のときであり,

このとき, $a_n = a_7 = 2^{-8} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{256}}$ である。

(4) $a_n < 1$ であるとき, $\log_2 a_n < 0$ であるから, $\boxed{6} \leqq n \leqq \boxed{8}$ である。

[第 3 問]

令和 3 年度 理工 (2021.12.5 実施) 第 1 問

三角形 OAB において, $\angle\text{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$, $\text{OA} = 4$, $\text{OB} = 3$ とする。辺 OA を 3 : 5 に内分する点を C, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D, 線分 AD と線分 BC との交点を P, 直線 OP と辺 AB の交点を Q とする。このとき,

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\text{OA}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\text{OB}}$$

であり,

$$\text{AB} = \sqrt{\boxed{\text{オカ}}}, \quad \text{AQ} = \frac{\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。四角形 OCPD の面積は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。直線 OP と線分 CD の交点を R とする。このとき,

$$\overrightarrow{\text{OR}} = \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\overrightarrow{\text{OP}}$$

である。また,

$$\frac{\text{CP}}{\text{PD}} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

[解答]

(1) $\overrightarrow{\text{OC}} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OD}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{OB}}$

$\overrightarrow{\text{OP}} = \alpha\overrightarrow{\text{OA}} + \beta\overrightarrow{\text{OB}}$ とする。

$\overrightarrow{\text{OP}} = \alpha\overrightarrow{\text{OA}} + \dfrac{3}{2}\beta\overrightarrow{\text{OD}}$

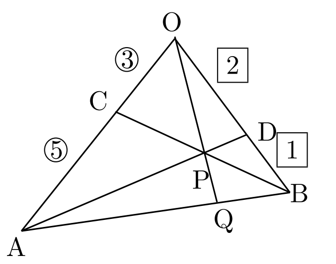
P は AD 上より, $\alpha + \dfrac{3}{2}\beta = 1 \quad \cdots①$

また, $\overrightarrow{\text{OP}} = \dfrac{8}{3}\alpha\overrightarrow{\text{OC}} + \beta\overrightarrow{\text{OB}}$

P は CB 上より, $\dfrac{8}{3}\alpha + \beta = 1 \quad \cdots②$

①, ② より, $\alpha = \dfrac{1}{6}$, $\beta = \dfrac{5}{9}$

したがって, $\overrightarrow{\text{OP}} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\overrightarrow{\text{OA}} + \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{9}}\overrightarrow{\text{OB}}$ である。



≪ポイント≫
$\overrightarrow{\text{OA}}$ と $\overrightarrow{\text{OB}}$ は一次独立とする。
$\overrightarrow{\text{OP}} = \alpha\overrightarrow{\text{OA}} + \beta\overrightarrow{\text{OB}}$
P が直線 AB 上 $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

三角形 OAB に余弦定理より，

$$\mathrm{AB}^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 13$$

したがって，$\mathrm{AB} = \sqrt{\boxed{13}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{18} = \frac{13}{18} \cdot \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{13}$$

Q は OP 上かつ AB 上より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{13}$

したがって，$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = 10 : 3 \quad \therefore\ \mathrm{AQ} = \dfrac{10}{13}\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{10}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{13}}$ である。

三角形 OAB の面積を S とすると，$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$

$\mathrm{OC} : \mathrm{CA} = 3 : 5,\quad \mathrm{OD} : \mathrm{DB} = 2 : 1,\quad \mathrm{OP} : \mathrm{PQ} = 13 : 5$ より

$\triangle\mathrm{CAB} = \dfrac{5}{8}S,\ \triangle\mathrm{DAB} = \dfrac{1}{3}S,\ \triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{5}{18}S$ であるから，

四角形 OCPD の面積は $S - \left(\dfrac{5}{8}S + \dfrac{1}{3}S - \dfrac{5}{18}S\right) = \dfrac{23}{72}S = \dfrac{23}{72} \cdot 3\sqrt{3} = \dfrac{\boxed{23}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{24}}$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{6}k \cdot \frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{5}{9}k \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{5}{6}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

R は CD 上より，$\dfrac{4}{9}k + \dfrac{5}{6}k = 1\ \therefore\ k = \dfrac{18}{23}$　したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{\boxed{18}}{\boxed{23}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\mathrm{CP} : \mathrm{PB} = 5 : 4$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = 5 : 1$ である。

三角形 OBC に余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \left(4 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 + 9 - 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{3}{8}\right) \cdot 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{27}{4} \\ \mathrm{BC} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{CP} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

三角形 OAD に余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= 16 + \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} = 12 \\ \mathrm{AD} &= 2\sqrt{3} \\ \mathrm{PD} &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$$

[**第 4 問**]

令和 3 年度 理工 ① (2021.12.6 実施) 第 3 問

原点を O とする座標平面上において, 放物線 Q : $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x+4$ と直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ の交点を A, B とする。ただし, A の x 座標は B の x 座標より大きい。また, 点 A を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を C とする。

(1) 放物線 Q の頂点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)$ である。

(2) 点 A の座標は $\left(\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ であり, 点 B の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である。また, 直線 AC の傾きを a, y 切片を b とすると,

$$a=-\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\ ,\quad b=\boxed{\text{ス}}$$

である。

(3) 三角形 ABC の外接円の中心を D とする。このとき, 点 D の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{セ}}},\ \boxed{\text{ソ}}\right)$ であり, 直線 OD と直線 BC の交点の x 座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$ である。

(4) $a,\ b$ は (2) で得られたものとする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq \dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x+4 \\ y \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ y \leqq ax+b \end{cases}$$

の表す領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

[**解答**]

(1) $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x+4=\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$

放物線 Q の頂点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}},\ \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}\right)$ である。

(2) $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x+4$ と $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ を連立すると

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}x^2-\frac{5\sqrt{3}}{3}x+4=\frac{\sqrt{3}}{3}x\\
&\frac{2}{3}x^2-2\sqrt{3}x+4=0\\
&x^2-3\sqrt{3}x+2\cdot 3=0\\
&(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0\\
&x=\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(点 A の x 座標)>(点 B の x 座標) より,

A$\left(\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}},\ \boxed{2}\right)$, B$\left(\sqrt{\boxed{3}},\ \boxed{1}\right)$ である。

OA と x 軸の正方向とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるから, 点 A を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 C は y 軸上にあり, OA $=\sqrt{12+4}=4$ であるから, C$(0,\ 4)$ である。

直線 AC の傾きは $a=\dfrac{4-2}{0-2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$, y 切片は $b=\boxed{4}$ である。

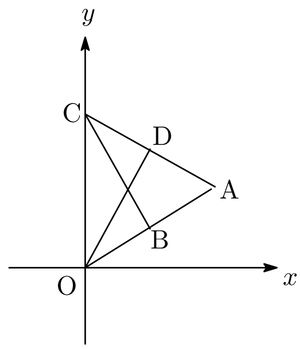
(3) 三角形 OAC は正三角形であり, 三角形 ABC は $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから, 三角形 ABC の外接円の中心 D は AC の中点である。

したがって, D$\left(\sqrt{\boxed{3}},\ \boxed{3}\right)$

OD と BC の交点は三角形 OAC の重心 G であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 2\right)$$

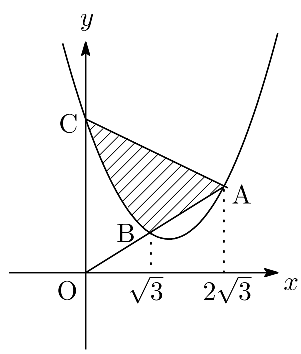
したがって, OD と BC の交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}},\ \boxed{2}\right)$ である。



(4) 直線 OA: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ である。

求める面積は

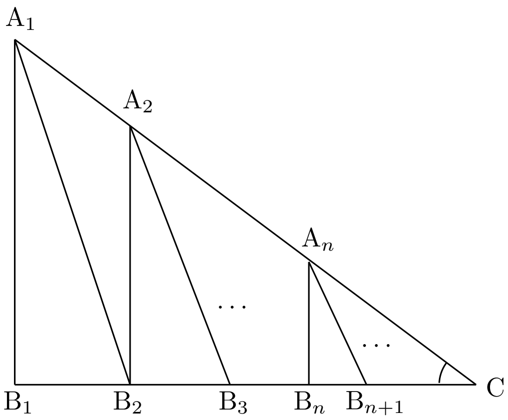
$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{(ax+b)-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{5\sqrt{3}}{3}x+4\right)\right\}dx-\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}x-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{5\sqrt{3}}{3}x+4\right)\right\}dx\\
&=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(2\sqrt{3})^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^3\\
&=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\
&=\frac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}
\end{aligned}$$



[第 5 問]

令和 3 年度 理工 ② (2021.12.6 実施) 第 3 問

辺 $\mathrm{A_1B_1}$ の長さが 3, 辺 $\mathrm{B_1C}$ の長さが 4, 辺 $\mathrm{CA_1}$ の長さが 5 の直角三角形 $\mathrm{A_1B_1C}$ を考える。



このとき, 図のように辺 $\mathrm{A_1C}$ 上に点 $\mathrm{A_2},\ \mathrm{A_3}, \mathrm{A_4}, \cdots, \mathrm{A}_n, \cdots$ をとり, 辺 $\mathrm{B_1C}$ 上に点 $\mathrm{B_2},\ \mathrm{B_3}, \mathrm{B_4}, \cdots, \mathrm{B}_n, \cdots$ をとる。ただし,

$$\triangle \mathrm{A_1B_1C} \backsim \triangle\, \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす。線分 $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の長さを r_n とおき, 三角形 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$ の面積を S_n とおく。

(1)

$$r_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad S_1 = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の長さを h_n, $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k$ とおく。このとき,

$$h_n = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} r_n, \quad h_{n+1} = \boxed{\text{ク}} - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} R_n$$

であり,

$$R_n = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}} \right)^n$$

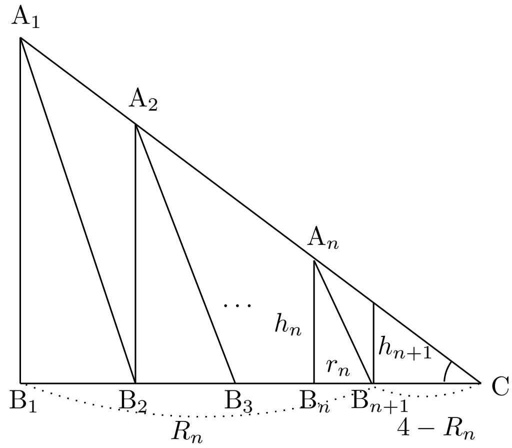
である。

(3) 数列 $\{S_n\}$ は初項 S_1, 公比 $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ の無限等比数列である。また, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

[解答]

(1) $\mathrm{A_1B_1} : \mathrm{B_1B_2} = 4 : 3$ であるから, $\mathrm{B_1B_2} = r_1 = 3 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{\boxed{9}}{\boxed{4}}$ であり, $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{9}{4} = \dfrac{\boxed{27}}{\boxed{8}}$ である。

(2) $h_n = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}} r_n,\quad h_{n+1} = \dfrac{3}{4}(4 - R_n) = 3 - \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}} R_n$



$$h_{n+1} = 3 - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} r_k$$

$$h_n = 3 - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n-1} r_k$$

$$h_{n+1} - h_n = -\frac{3}{4} r_n = -\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} h_n$$

$$h_{n+1} = \frac{7}{16} h_n$$

$h_1 = 3$ であるから, $h_n = 3\left(\dfrac{7}{16}\right)^{n-1}$

$$h_{n+1} = 3 - \frac{3}{4} R_n = 3\left(\frac{7}{16}\right)^{n}$$

したがって, $R_n = \dfrac{4}{3}\left\{3 - 3\left(\dfrac{7}{16}\right)^{n}\right\} = \boxed{4} - \boxed{4}\left(\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{16}}\right)^{n}$

(3) $\triangle \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$ と $\triangle \mathrm{B}_{n+2}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$ の相似比は $16 : 7$ であるから, $S_{n+1} = \left(\dfrac{7}{16}\right)^2 S_n = \dfrac{49}{256} S_n$

数列 $\{S_n\}$ は初項 $S_1 = \dfrac{27}{8}$, 公比 $\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{256}}$ の無限等比数列である。

したがって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{27}{8}}{1 - \frac{49}{256}} = \frac{\boxed{96}}{\boxed{23}}$

≪ポイント≫
$-1 < r < 1$ のとき
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}$

[第 6 問]

令和 2 年度 生物理工・工 (2019.11.16 実施) 第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし, 関数 $f(x)=6x^2-6ax$ を考える。

$$S=\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

とおくと, $a>1$ のとき　$S=\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}}$, $0<a \leqq 1$ のとき　$S=\boxed{\text{ウ}}a^3-\boxed{\text{エ}}a+\boxed{\text{オ}}$

である。S は $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

(2) $\left[\dfrac{n^2-7}{5}\right]+\left[\dfrac{n^2-5}{6}\right]=6$ を満たす自然数 n は $\boxed{\text{コ}}$ である。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(3) x の整式 $x^{100}-1$ を x^2-2x+1 で割ったときの余りは

$$\boxed{\text{サシス}}x-\boxed{\text{セソタ}}$$

である。

(4) 正の実数 $x,\ y$ が $2x+3y=1$ を満たすとき, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}$ の最小値は

$$\boxed{\text{チ}}+\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

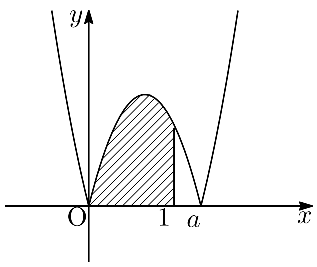
[解答]

(1) $|f(x)|=6|x(x-a)|$

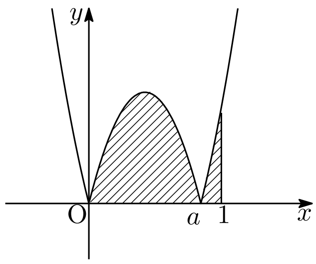
$$S=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 6|x(x-a)|\,dx$$

$a>1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 6|x(x-a)|\,dx \\ &= \int_0^1 \{-6x(x-a)\}\,dx \\ &= \int_0^1 (-6x^2+6ax)\,dx \\ &= \left[-2x^3+3ax^2\right]_0^1 \\ &= -2+3a \\ &= \boxed{\mathbf{3}}a-\boxed{\mathbf{2}} \end{aligned}$$



$0 < a \leqq 1$ のとき



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 6|x(x-a)|\ dx \\
&= \int_0^a \{-6x(x-a)\}\ dx + \int_a^1 (6x^2 - 6ax)\ dx \\
&= -\frac{-6}{6}(a-0)^3 + \left[2x^3 - 3ax^2\right]_a^1 \\
&= a^3 + 2 - 3a - (2a^3 - 3a^3) \\
&= \boxed{\mathbf{2}}\,a^3 - \boxed{\mathbf{3}}\,a + \boxed{\mathbf{2}}
\end{aligned}
$$

$0 < a < 1$ のとき,

$$\frac{dS}{da} = 6a^2 - 3 = 3(2a^2 - 1)$$

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$		$+$
S		$\searrow$	$2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

S は $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{2}}}}{\boxed{\mathbf{2}}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\mathbf{2}} - \sqrt{\boxed{\mathbf{2}}}$ をとる。

(2) $\dfrac{n^2-7}{5} < 7$ より, $n^2 < 42$

$n^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36$ のうち, $\left[\dfrac{n^2-7}{5}\right] + \left[\dfrac{n^2-5}{6}\right] = 6$ を

満たすのは $n^2 = 25$ であるから, 求める自然数 n は $n = \boxed{\mathbf{5}}$

≪ポイント≫

$[x] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leqq x < n+1$

(3) $f(x) = x^{100} - 1$ を $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $a(x-1)+b$ とする。

$$f(x) = x^{100} - 1 = (x-1)^2 Q(x) + a(x-1) + b$$

$f(1) = 0 = b$

$f(x) = x^{100} - 1 = (x-1)^2 Q(x) + a(x-1)$ より,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^{100}-1}{x-1} = (x-1)Q(x) + a \\
g(x) &= x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1 = (x-1)Q(x) + a \\
g(1) &= 100 = a
\end{aligned}
$$

≪ポイント≫

n を自然数とする。

$x^n - y^n$

$= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

したがって, 求める余りは

$$a(x-1) + b = 100(x-1) = \boxed{\mathbf{100}}\,x - \boxed{\mathbf{100}}$$

(別解) ≪積の微分を用いる≫ $b = 0$ が求まった後

$f'(x) = 100x^{99} = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$ より, $f'(1) = 100 = a$

したがって, 求める余りは $a(x-1) + b = 100(x-1) = \boxed{\mathbf{100}}\,x - \boxed{\mathbf{100}}$

(4) $2x+3y=1$ より

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}=(2x+3y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}\right)=3+\frac{2x}{3y}+\frac{3y}{x}\geqq 3+2\sqrt{\frac{2x}{3y}\cdot\frac{3y}{x}}=3+2\sqrt{2}$$

等号成立は $\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{3y}{x}$ のとき, つまり,

$\sqrt{2}x=3y$

$2x+3y=2x+\sqrt{2}x=(2+\sqrt{2})x=1$

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$ のとき。

したがって, 求める最小値は $\boxed{\mathbf{3}}+\boxed{\mathbf{2}}\sqrt{\boxed{\mathbf{2}}}$ である。

≪ポイント≫
相加相乗平均の関係
$a>0,\ b>0$ のとき
$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
(等号成立は $a=b$ のとき)

(別解)

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}=k$ とおくと, $3y+x=3kxy\quad\cdots$①

$3y=1-2x>0$ より, $0<x<\dfrac{1}{2}$

① に代入すると,

$1-2x+x=kx(1-2x)$

$f(x)=2kx^2-(k+1)x+1=0$

これが $0<x<\dfrac{1}{2}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ k のとり得る値の範囲を求める。

$x,\ y$ は正の値であるから, $k>0$ である。

$f(0)=1>0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ であるから, $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{1}{2}$ に 2 解をもつ。(重解を含む)

$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(k+1)^2-8k\geqq 0$

$k^2-6k+1\geqq 0$

$k\leqq 3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\leqq k$

$y=f(x)$ の軸の方程式 $x=\dfrac{k+1}{4k}$

$0<\dfrac{k+1}{4k}<\dfrac{1}{2}$

$0<k+1<2k\quad(k>0)$

$k>\dfrac{1}{2}$

したがって, $3+2\sqrt{2}\leqq k$ であるから, 求める最小値は $\boxed{\mathbf{3}}+\boxed{\mathbf{2}}\sqrt{\boxed{\mathbf{2}}}$ である。

[第 7 問]

令和 2 年度 生物理工・工 (2019.11.17 実施) 第 1 問

(1) 正の実数 x と y が $xy=4$ を満たすとする。

(i) $\log_2(x+y)$ は $x=$ **ア**, $y=$ **イ** のとき最小値 **ウ** をとる。

(ii) $y=x^{\log_2\sqrt{y}}$ を満たす $(x,\ y)$ の組は (**エ**, **オ**) である。

(iii) $2^{\log_2 x^2}=x^{\log_2 y}$ を満たす $(x,\ y)$ の組は (**カ**, **キ**) である。

(iv) $x^{\log_2 y}y^{\log_2 x}=\dfrac{1}{64}$ を満たす $(x,\ y)$ の組は 2 つあり, x の値が小さい順に

$\left(\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\ \boxed{コ}\right)$ および $\left(\boxed{サ},\ \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\right)$ である。

(2) O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(\sqrt{3},\ 3)$, B$(-6-2\sqrt{3},\ 0)$ がある。△OAB において $\angle$AOB $=$ **セソタ**$^\circ$ であり, $\angle$OAB $=$ **チツ**$^\circ$ である。$\angle$AOB の二等分線と AB の交点を M とすると

$$\mathrm{AM}=\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}-\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$$

である。

[解答]

(1) (i) $x>0,\ y>0$ であるから, 相加相乗平均の関係より

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy}=4 \quad \text{等号成立は } x=y=2 \text{ のとき}$$

したがって, $\log_2(x+y)\geqq \log_2 4=2$

$\log_2(x+y)$ は $x=\boxed{2}$, $y=\boxed{2}$ のとき最小値 $\boxed{2}$ をとる。

(ii) $y=x^{\log_2\sqrt{y}}$ の両辺, 底 2 の対数をとると

$$\begin{aligned}
&\log_2 y=\log_2\sqrt{y}\log_2 x\\
&\log_2 y=\frac{1}{2}\log_2 y\log_2 x\\
&(\log_2 x-2)(\log_2 y)=0\\
&\log_2 x=2 \quad \text{または} \quad \log_2 y=0\\
&x=4 \quad \text{または} \quad y=1
\end{aligned}$$

$xy=4$ より, いずれの場合も $(x,\ y)=\left(\boxed{4},\ \boxed{1}\right)$ である。

(iii) $2^{\log_2 x^2}=x^{\log_2 y}$ の両辺, 底 2 の対数をとると

$$\begin{aligned}
&\log_2 x^2=\log_2 y\log_2 x\\
&2\log_2 x=\log_2 y\log_2 x\\
&\log_2 x(\log_2 y-2)=0\\
&\log_2 x=0 \quad \text{または} \quad \log_2 y=2\\
&x=1 \quad \text{または} \quad y=4
\end{aligned}$$

$xy=4$ より, いずれの場合も $(x,\ y)=\left(\boxed{1},\ \boxed{4}\right)$ である。

(iv) $x^{\log_2 y}y^{\log_2 x} = \dfrac{1}{64}$ の両辺, 底 2 の対数をとると

$$\begin{aligned}
&\log_2(x^{\log_2 y}y^{\log_2 x}) = \log_2 \frac{1}{64}\\
&\log_2(x^{\log_2 y}) + \log_2(y^{\log_2 x}) = \log_2 2^{-6}\\
&\log_2 y \log_2 x + \log_2 x \log_2 y = -6\\
&\log_2 x \log_2 y = -3\\
&\log_2 x \log_2 \frac{4}{x} = -3\\
&\log_2 x(\log_2 4 - \log_2 x) = -3\\
&(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0\\
&(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) = 0\\
&\log_2 x = -1,\ 3\\
&x = \frac{1}{2},\ 8
\end{aligned}$$

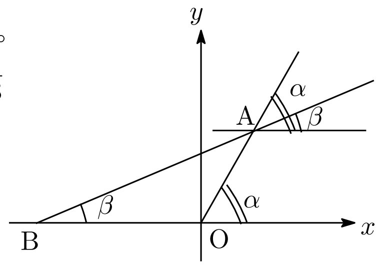
$xy = 4$ より,

$$(x,\ y) = \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}},\ \boxed{8}\right),\quad \left(\boxed{8},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)$$

(2) OA の傾きは $\sqrt{3}$ であるから, OA と x 軸の正方向とのなす角は 60° である。

したがって, $\angle\mathrm{AOB} = \boxed{120}^\circ$ である。

OA, AB と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とする。



$$\tan\alpha = \sqrt{3},\quad \tan\beta = \frac{3}{6+3\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2\sqrt{3}-2}{1+2\sqrt{3}-3} = 1$$

したがって, $\angle\mathrm{OAB} = \boxed{45}^\circ$ である。

(別解) ≪ベクトルの内積を用いる≫

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (-\sqrt{3},\ -3)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-6-3\sqrt{3},\ -3)$ のなす角を θ とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(6+3\sqrt{3})^2+9} = \sqrt{9(8+4\sqrt{3})} = 3\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}(6+3\sqrt{3})+9 = 6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \dfrac{6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって, $\theta = \angle\mathrm{OAB} = \boxed{45}^\circ$ である。

$\angle\mathrm{OMA} = 75^\circ$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

三角形 OMA に正弦定理を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{AM}}{\sin 60^\circ} = \frac{\mathrm{OA}}{\sin 75^\circ}\\
&\mathrm{AM} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\
&\mathrm{AM} = \boxed{3}\sqrt{\boxed{6}} - \boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}
\end{aligned}$$

[第 8 問]

令和 2 年度 生物理工・工 (2019.11.17 実施) 第 2 問

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき, 1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b, 3 回目に出る目を c とする。

(1) $ab = 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(2) $abc = 12$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3) $ab = 4$ となり, abc=12 となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(4) $ab \geqq 10$ となる積 ab は全部で $\boxed{\text{コサ}}$ 個ある。

(5) $ab \geqq 10$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(6) $abc \geqq 100$ となる積 abc は全部で $\boxed{\text{タ}}$ 個ある。

(7) $abc \geqq 100$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ である。

[解答]

(1) $ab = 4$ となる $(a,\ b)$ の組は

$(a,\ b) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の 3 通り

したがって, 求める確率は $\dfrac{3}{6^2} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$ である。

≪ポイント≫
$ab = 4$ となるのは何通りか？と問われた場合は
c が $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 6 通りであるから,
$3 \times 6 = 18$ 通りとなる。

(2) 3 つの数の積が 12 となる組は

i) $(1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 3,\ 4)$
ii) $(2,\ 2,\ 3)$

i) のとき, $(a,\ b,\ c)$ の組は $3! = 6$ 通りずつ

ii) のとき, $(a,\ b,\ c)$ の組は $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通りずつ

したがって, $abc = 12$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組は $6 \times 2 + 3 = 15$ 通りであるから,

求める確率は $\dfrac{15}{6^3} = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{72}}$ である。

(3) $ab = 4$ かつ $abc = 12$ となる確率は

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 3),\ (4,\ 1,\ 3)$

の 3 通りより, 求める確率は $\dfrac{3}{6^3} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{72}}$ である。

(4) $ab \geqq 10$ となる積 ab は

$ab = 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 24,\ 25,\ 30,\ 36$

したがって, $\boxed{10}$ 個ある。

≪ポイント≫
積 ab は何通りか？なので, $(a,\ b)$ の組の数でなく,
ab のとり得る値の個数を求める。

(5) $ab=10$ のとき, $(a,\ b)=(2,\ 5),\ (5,\ 2)$ の 2 通り
$ab=12$ のとき, $(a,\ b)=(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$ の 4 通り
$ab=15$ のとき, $(a,\ b)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ の 2 通り
$ab=16$ のとき, $(a,\ b)=(4,\ 4)$ の 1 通り
$ab=18$ のとき, $(a,\ b)=(3,\ 6),\ (6,\ 3)$ の 2 通り
$ab=20$ のとき, $(a,\ b)=(4,\ 5),\ (5,\ 4)$ の 2 通り
$ab=24$ のとき, $(a,\ b)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)$ の 2 通り
$ab=25$ のとき, $(a,\ b)=(5,\ 5)$ の 1 通り
$ab=30$ のとき, $(a,\ b)=(5,\ 6),\ (6,\ 5)$ の 2 通り
$ab=36$ のとき, $(a,\ b)=(6,\ 6)$ の 1 通り
したがって, $2+4+2+1+2+2+2+1+2+1=19$ 通りであるから,
求める確率は $\dfrac{19}{6^2}=\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{36}}$ である。

(6) $abc \geqq 100$ となる $ab\times c$ の値は

$$\begin{aligned}&18\times 6=108,\ 20\times 5=100,\ 20\times 6=120,\ 24\times 5=120,\ 24\times 6=144,\ 25\times 4=100,\\ &25\times 5=125,\ 25\times 6=150,\ 30\times 4=120,\ 30\times 5=150,\ 30\times 6=180,\ 36\times 3=108,\\ &36\times 4=144,\ 36\times 5=180,\ 36\times 6=216\end{aligned}$$

したがって, $abc=100,\ 108,\ 120,\ 125,\ 144,\ 150,\ 180,\ 216$ の $\boxed{8}$ 個ある。

(7) $abc \geqq 100$
$ab=18$ のとき, 2 通り
$ab=20$ のとき, $2\times 2=4$ 通り
$ab=24$ のとき, $2\times 2=4$ 通り
$ab=25$ のとき, $1\times 3=3$ 通り
$ab=30$ のとき, $2\times 3=6$ 通り
$ab=36$ のとき, $1\times 4=4$ 通り
したがって, $abc \geqq 100$ となる組は $2+4+4+3+6+4=23$ 通りであるから,
求める確率は $\dfrac{23}{6^3}=\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{216}}$ である。

[**第 9 問**]

令和 2 年度 理工 (2019.11.30 実施) 第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 2020 の正の約数の個数は $\boxed{\textbf{アイ}}$ である。

(2) $m,\ n$ を自然数とする。$m^2 - n^2 = 2020$ を満たす組 $(m,\ n)$ は全部で $\boxed{\textbf{ウ}}$ 個ある。

(3) $m,\ n$ を自然数とし, $n \geqq 2$ とする。m から始まる連続する n 個の自然数の和が 2020 となる組 $(m,\ n)$ は全部で $\boxed{\textbf{エ}}$ 個ある。

(4) 不等式 $0 < \dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{1}{2}$ を満たす x のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\textbf{オカ}} < x < \boxed{\textbf{キク}}$$

である。

(5) 不等式 $0 < \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x^2 - x + 1} < \dfrac{1}{2}$ を満たす x のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\textbf{ケコ}} < x < \frac{\boxed{\textbf{サシ}}}{\boxed{\textbf{ス}}},\quad \boxed{\textbf{セ}} < x < \frac{\boxed{\textbf{ソ}}}{\boxed{\textbf{タ}}}$$

である。

(6) $\triangle$ABC において AB $= 5$, AC $= \sqrt{3}$ である。点 A を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円が辺 AB と交わる点を P とするとき, $\angle$PCB $= 15^\circ$ である。この円が辺 BC と点 C 以外で交わる点を Q とする。このとき,

$$\mathrm{BQ} = \sqrt{\boxed{\textbf{チツ}}},\quad \mathrm{QC} = \frac{\boxed{\textbf{テ}}\sqrt{\boxed{\textbf{トナ}}}}{\boxed{\textbf{ニヌ}}}$$

である。

[**解答**]

(1) $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ より, 2020 の正の約数の個数は

$$(2+1)(1+1)(1+1) = \boxed{12}\ \text{個}$$

≪ポイント≫
a, b, c を素数とし, p, q, r を 0 以上の整数とするとき
$a^p \cdot b^q \cdot c^r$ の正の約数の個数は
$(p+1)(q+1)(r+1)$ 個
正の約数の総和は
$(1 + a + a^2 + \cdots + a^p)(1 + b + b^2 + \cdots + b^q)(1 + c + c^2 + \cdots + c^r)$

(2) $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$

$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致することと, $m+n > m-n$ であることから

$$\begin{aligned}(m+n,\ m-n) &= (2\cdot 5\cdot 101,\ 2),\ (2\cdot 101,\ 2\cdot 5)\\ (m,\ n) &= (506,\ 504),\ (106,\ 96)\end{aligned}$$

したがって, $(m,\ n)$ の組は $\boxed{2}$ 個である。

≪ポイント≫
2 つの整数 m と n の和と差の偶奇は一致する。
$(m, n)=($偶, 偶$)$ のとき, $(m+n,\ m-n)=($偶, 偶$)$
$(m, n)=($奇, 奇$)$ のとき, $(m+n,\ m-n)=($偶, 偶$)$
$(m, n)=($偶, 奇$)$ のとき, $(m+n,\ m-n)=($奇, 奇$)$
$(m, n)=($奇, 偶$)$ のとき, $(m+n,\ m-n)=($奇, 奇$)$

(3) m から始まる連続する n 個の自然数の和が 2020 より

$$\frac{n}{2}\{2m+(n-1)\cdot 1\}=2020$$
$$n(2m+n-1)=4040=2^3\cdot 5\cdot 101$$

n が偶数のとき, $2m+n-1$ は奇数であり,
n が奇数のとき, $2m+n-1$ は偶数である。
したがって, n が偶数のとき, n は 8 の倍数
$n=8$ のとき, $2m+8-1=505$ より, $m=249$
$n=8\cdot 5$ のとき, $2m+40-1=101$ より, $m=31$
$n=8\cdot 101$ のときと $n=8\cdot 5\cdot 101$ のときは $m<0$ となり不適
$n=5$ のとき, $2m+5-1=808$ より, $m=402$
$n=101$ のとき, $m<0$ となり不適
したがって, $(m,\ n)=(8,\ 249),\ (40,\ 31),\ (5,\ 402)$ であるから,
求める組の数は $\boxed{3}$ 個である。

≪ポイント≫
初項 a, 末項 l, 公差 d の等差数列の
初項から第 n 項までの和 S_n は
$S_n=\dfrac{n}{2}(a+l)=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

≪ポイント≫
来年度は 2022 年度入試なので,
2022 について調べておくとよい
$2022=2\cdot 3\cdot 337$
337 は素数である。
$337=16^2+9^2=2^8+3^4$
$2022_{(3)}=2\cdot 3^3+2\cdot 3+2=62$

(4) $0<\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{1}{2}$ より, $2(x-1)^2$ を全辺にかけると　$0<2(x+1)(x-1)<(x-1)^2$
$2(x+1)(x-1)>0$ より,　$x<-1,\ 1<x\quad\cdots$①
$2(x+1)(x-1)<(x-1)^2$ より,
$$(x-1)(2x+2-x+1)<0$$
$$(x-1)(x+3)<0$$
$$-3<x<1\quad\cdots②$$

≪ポイント≫
分母の $x-1$ が正のときと負のときで
場合分けしてもよいが, (分母)^2 を
かけるとよい。

① , ② より, 求める x の値の範囲は $\boxed{-3}<x<\boxed{-1}$ である。

(5) $2x^2-x+1=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$ であるから,
$0<\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2-x+1}<\dfrac{1}{2}$ より, $0<2(2x^2-x-1)<2x^2-x+1$

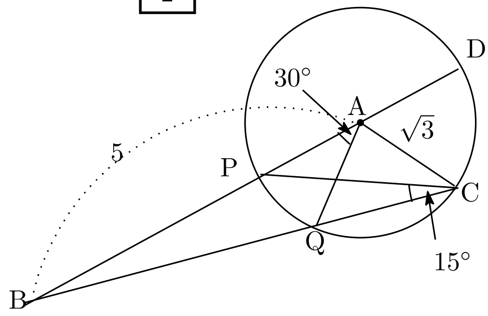
$2(2x^2-x-1)>0$ より
$$(x-1)(2x+1)>0$$
$$x<-\frac{1}{2},\quad 1<x\quad\cdots③$$
$2(2x^2-x-1)<2x^2-x+1$ より
$$2x^2-x-3<0$$
$$(x+1)(2x-3)<0$$
$$-1<x<\frac{3}{2}\quad\cdots④$$

③ , ④ より, 求める x の値の範囲は

$$\boxed{-1} < x < \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}, \quad \boxed{1} < x < \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

(6) $\angle\mathrm{PAQ} = 2\angle\mathrm{PCB} = 30^\circ$ であるから

三角形 ABQ に余弦定理より



$$\mathrm{BQ}^2 = 25 + 3 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 13$$

$$\mathrm{BQ} = \sqrt{\boxed{13}}$$

直線 AB と円との共有点のうち点 P と異なる点を

D とすると, 方べきの定理より

$$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BC} = \mathrm{BP}\cdot\mathrm{BD}$$

$$\sqrt{13}\mathrm{BC} = (5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3}) = 22$$

$$\mathrm{BC} = \frac{22}{\sqrt{13}} = \frac{22\sqrt{13}}{13}$$

$$\mathrm{QC} = \frac{22\sqrt{13}}{13} - \sqrt{13} = \frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{13}}$$

[**第 10 問**]

令和 2 年度 理工 ② (2019.12.1 実施) 第 3 問

z を -1 でない複素数として,

$$w = \frac{z+2i}{z+1}$$

とおく。ただし, i は虚数単位である。

(1) z を実数とする。

(i) w が純虚数になるのは $z = \boxed{\text{ア}}$ のときで, このとき $w = \boxed{\text{イ}}\,i$ である。

(ii) $|w|$ は $z = \boxed{\text{ウ}}$ のとき, 最小値 $\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ をとる。

(2) $|z| = 1$ のとき, 偏角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となる w は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} + \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}i$ である。

(3) 点 z が複素数平面の虚軸上を動くとき,

w は点 $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} + i$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ の円から $w = \boxed{\text{タ}}$ を除いた図形を描く。

[**解答**]

(1) (i) $w = \dfrac{z}{z+1} + \dfrac{2}{z+1}i$ (z は実数) が純虚数より

実部 $\dfrac{z}{z+1} = 0$ より $z = \boxed{0}$

このとき, $w = \boxed{2}\,i$ である。

(ii) $|w|^2 = \dfrac{z^2+4}{(z+1)^2} = k$ とおく。

$$\begin{aligned} &z^2+4 = k(z^2+2z+1) \\ &(k-1)z^2 + 2kz + k - 4 = 0 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$k = 1$ のとき, $2z - 3 = 0$ より, $z = \dfrac{3}{2}$

$k \fallingdotseq 1$ のとき, z は実数値をとって動くので, ① の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} &D/4 = k^2 - (k-1)(k-4) \geqq 0 \\ &k \geqq \frac{4}{5} \\ &|w|^2 \geqq \frac{4}{5} \\ &|w| \geqq \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$k = \dfrac{4}{5}$ のとき, z は ① の重解より

$$z = -\frac{k}{k-1} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-1} = 4$$

したがって, $|w|$ は $z=\boxed{4}$ のとき, 最小値 $\dfrac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$ をとる。

(2) $w=\dfrac{z+2i}{z+1}$ より

$$\begin{aligned}&wz+w=z+2i\\&(w-1)z=-w+2i\\&z=\frac{-w+2i}{w-1}\quad(w\fallingdotseq 1)\end{aligned}$$

$|z|=1$ より, $\quad|-w+2i|=|w-1| \quad\Leftrightarrow\quad |w-2i|=|w-1|$

w は 2 点 A$(2i)$ と B(1) からの距離が等しい点の軌跡であるから, 線分 AB の垂直二等分線上を動く。

xy 平面において, A$(0,\ 2)$, B$(1,\ 0)$ である。

AB の傾き -2, AB の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ より, 線分 AB の垂直二等分線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$

w の偏角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となるとき w は $y=-x$ と $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ との交点である。

$-x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ より, 交点の座標は $\left(\dfrac{-1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって, 複素数平面において w は $w=\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}+\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}i$ である。

(3) $z=\dfrac{-w+2i}{w-1}\quad(w\fallingdotseq 1)$ が虚軸上を動くので, $z=-\overline{z}$ であるから

$$\begin{aligned}&\frac{-w+2i}{w-1}=-\overline{\left(\frac{-w+2i}{w-1}\right)}\\&\frac{-w+2i}{w-1}=-\frac{-\overline{w}-2i}{\overline{w}-1}\\&\frac{-w+2i}{w-1}=\frac{\overline{w}+2i}{\overline{w}-1}\\&(-w+2i)(\overline{w}-1)=(\overline{w}+2i)(w-1)\\&-w\overline{w}+w+2i\overline{w}-2i=w\overline{w}+2iw-\overline{w}-2i\\&2w\overline{w}+(-1+2i)w+(-1-2i)\overline{w}=0\\&w\overline{w}-\frac{1-2i}{2}w-\frac{1+2i}{2}\overline{w}=0\\&\left(w-\frac{1+2i}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1+2i}{2}\right)=\frac{5}{4}\\&\left|w-\frac{1-2i}{2}\right|^2=\frac{5}{4}\\&\left|w-\frac{1-2i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

≪ポイント≫
z が実数 $\quad\Leftrightarrow\quad z=\overline{z}$

z が純虚数 $\quad\Leftrightarrow\quad z=-\overline{z}\quad(z\fallingdotseq 0)$

したがって, w は点 $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$ の円から $w=\boxed{1}$ を除いた図形を描く。

[**練習**]

チェック1

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)\ dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)(x-2)\ dx = \frac{\boxed{\text{エオカキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2\ dx = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$

(4) 放物線 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ と直線 $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(5) 曲線 $C:\ y=\dfrac{1}{2}x^3-3x$ 上の点 A$(2,\ -2)$ における接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{ソ}}x-\boxed{\text{タ}}$ であり, 曲線 C と接線 l との共有点のうち, A と異なる点の x 座標は $x=\boxed{\text{チツ}}$, C と l とで囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{テト}}$ である。

チェック2

$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$[3,7]=\boxed{\text{ア}},\quad [5]=\boxed{\text{イ}},\ [-7,3]=\boxed{\text{ウエ}}$$

である。
$[x]^2+2[x]-3\leqq 0$ の解は $\boxed{\text{オカ}}\leqq x<\boxed{\text{キ}}$ である。

[練習 解答]

チェック１

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)\,dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)(x-2)\,dx = \frac{\boxed{\text{エオカキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2\,dx = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$

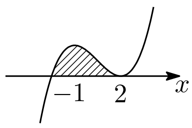
(4) 放物線 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ と直線 $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(5) 曲線 C： $y=\dfrac{1}{2}x^3-3x$ 上の点 A$(2,\ -2)$ における接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{ソ}}\,x-\boxed{\text{タ}}$ であり, 曲線 C と接線 l との共有点のうち, A と異なる点の x 座標は $x=\boxed{\text{チツ}}$, C と l とで囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{テト}}$ である。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)\,dx = -\frac{1}{6}(2+1)^3 = \frac{\boxed{-9}}{\boxed{2}}$

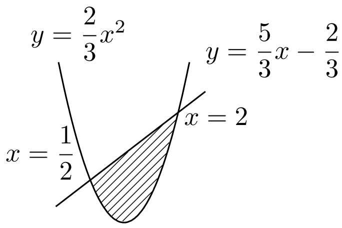
(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)(x-2)\,dx = -\frac{2}{6}\left(2+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\boxed{-125}}{\boxed{24}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2\,dx = \frac{1}{12}(2+1)^4 = \frac{\boxed{27}}{\boxed{4}}$



(4) $y=\dfrac{2}{3}x^2$ と $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}$ を連立すると

$$\frac{2}{3}x^2=\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$$
$$2x^2-5x+2=0$$
$$(2x-1)(x-2)=0$$
$$x=\frac{1}{2},\ 2$$



したがって, 求める面積は

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^2\right)dx = -\frac{1}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$$

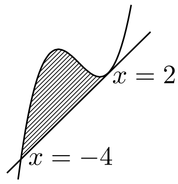
(5) $y=\dfrac{1}{2}x^3-3x \quad \cdots ①$ より, $y'=\dfrac{3}{2}x^2-3$

$x=2$ のとき, $y'=3$ したがって, A$(2,\ -2)$ における接線の方程式は

$$y=3(x-2)-2=\boxed{3}\,x-\boxed{8} \quad \cdots ②$$

① と ② を連立すると

$$\frac{1}{2}x^3 - 3x = 3x - 8$$
$$x^3 - 12x + 16 = 0$$
$$(x-2)^2(x+4) = 0$$
$$x = 2,\ -4$$



C と l の共有点のうち, 点 A と異なる点の x 座標は $x = \boxed{-4}$ である。

C と l で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-4}^{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x \right) - (3x-8) \right\} dx = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}(2+4)^4 = \boxed{54}$$

チェック 2

$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$[3,7] = \boxed{\textbf{ア}}, \quad [5] = \boxed{\textbf{イ}}, \ [-7,3] = \boxed{\textbf{ウエ}}$$

である。

$[x]^2 + 2[x] - 3 \leqq 0$ の解は $\boxed{\textbf{オカ}} \leqq x < \boxed{\textbf{キ}}$ である。

$[3,7] = \boxed{3}, \quad [5] = \boxed{5}, \ [-7,3] = \boxed{-8}$

$[x]^2 + 2[x] - 3 \leqq 0$ より, $([x]+3)([x]-1) \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqq [x] \leqq 1$ である。

$[x]$ は整数より, $[x] = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$

したがって, 求める x の値の範囲は $\boxed{-3} \leqq x < \boxed{2}$ である。