

数 学

(解答番号 $^1 \square \sim ^{57} \square$)

解答上の注意

- 1) 問題の文中の $^1 \square$, $^2 \square$ などの一つ一つには、特に指示のないかぎり、それぞれ0から9までの数字が一つ入る。 $\square$ の左上の数字は「解答番号」である。
- 2) 2個並んだ $\square \square$ は2桁(けた)の正の整数を表す。3個以上並んだ場合も同様である。
- 3) $\square$ の前に「-」がついている場合は負の整数を表す。例えば、 $-\square$ は1桁の負の整数を表し、 $-\square\square$ は2桁の負の整数を表す。
- 4) $\frac{\square}{\square}$, $\frac{\square}{\square\square}$, $-\frac{\square}{\square}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。
- 5) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば、 $\square\sqrt{\square}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。
- 6) 選択肢から一つを選んで、番号を答える場合もある。

I O を原点とする座標平面上に点 A(1,1) をとる。また, $x \geq 0, y \geq 0$ とし, $\triangle OAB$ が OB を底辺とする二等辺三角形となるように点 B(x, y) をとる。ここで, $\triangle OAB$ の頂角を α , 面積を S とする。

(1) α がとりうる値の範囲は $^1\Box ^2\Box ^\circ \leq \alpha < ^3\Box ^4\Box ^5\Box ^\circ$ である。

(2) α の値が最小となるときの B の座標は, x 座標が小さい方から順に $(^6\Box, ^7\Box), (^8\Box, ^9\Box)$ である。

(3) B の x 座標が最大となるのは, $\alpha = ^{10}\Box ^{11}\Box ^{12}\Box ^\circ$ のときであり, このとき $S = \frac{\sqrt{^{13}\Box}}{^{14}\Box}$ である。

(4) $\alpha = 120^\circ$ のとき, OB の長さは $\sqrt{^{15}\Box}$ であり, $S = \frac{\sqrt{^{16}\Box}}{^{17}\Box}$ である。

また, $\triangle OAB$ の内接円の面積は $\left(\frac{^{18}\Box ^{19}\Box}{^{20}\Box} - ^{21}\Box \sqrt{^{22}\Box} \right) \pi$ である。

(計 算 用 紙)

II 大小 2 つのさいころを投げ, 出た目をそれぞれ a, b とする。さらに $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ とする。

(1) $f(x) = 0$ が重解をもつ確率は $\frac{\overset{23}{\square}}{\overset{24}{\square}\overset{25}{\square}}$ である。

(2) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率は $\frac{\overset{26}{\square}}{\overset{27}{\square}}$ である。

(3) $I = \int_0^1 f(x) dx$ とおく。

(i) I が偶数となる確率は $\frac{\overset{28}{\square}}{\overset{29}{\square}}$ である。

(ii) $\sqrt{I}$ が整数となる確率は $\frac{\overset{30}{\square}}{\overset{31}{\square}\overset{32}{\square}}$ である。

(iii) I が素数となる確率は $\frac{\overset{33}{\square}\overset{34}{\square}}{\overset{35}{\square}\overset{36}{\square}}$ である。

(4) 座標平面において, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における曲線の接線を ℓ とする。 ℓ が原点を通る確率は $\frac{\overset{37}{\square}}{\overset{38}{\square}}$ であり, ℓ が点 $(2, 18)$ を通る確率は

$\frac{\overset{39}{\square}}{\overset{40}{\square}\overset{41}{\square}}$ である。

(計 算 用 紙)

III 次の関数 $f(x)$ を考える。ただし, a, b は実数の定数とする。

$$f(x) = x^3 + 2(a-1)x^2 - 2(2a-b)x - 4b$$

(1) a, b の値に関係なく, 方程式 $f(x) = 0$ は実数解 $x = \overset{42}{\square}$ をもつ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が虚数解 $x = 4 + i$ をもつとき, $a = -\overset{43}{\square}$,

$$b = \frac{\overset{44}{\square} \overset{45}{\square}}{\overset{46}{\square}} \text{ である。}$$

(3) $a > 0, b = 4$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつとする。

(i) a のとりうる値の範囲は $a > \overset{47}{\square} \sqrt{\overset{48}{\square}}$ である。

(ii) 方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの実数解を小さい方から順に並べたとき, それらが

$$\text{等差数列となるのは, } a = \frac{\overset{49}{\square} + \overset{50}{\square} \sqrt{\overset{51}{\square} \overset{52}{\square}}}{\overset{53}{\square}} \text{ のときである。}$$

(4) $y = f(x)$ が極大値 0 をもつとする。このとき, 座標平面において $y = f(x)$

と $y = 0$ で囲まれる図形の面積が $\frac{4}{3}$ となる a, b の組 (a, b) は, a の値が大き

い方から順に $(\overset{54}{\square}, \overset{55}{\square})$ と $(-\overset{56}{\square}, \overset{57}{\square})$ である。

(計 算 用 紙)