数　　学

（解答番号 $^{1}\square$ ～ $^{48}\square$）

解答上の注意

1)　問題の文中の $^{1}\square$，$^{2}\square$ などの一つ一つには，特に指示のないかぎり，それぞれ0から9までの数字が一つ入る。$\square$ の左上の数字は「解答番号」である。

2)　2個並んだ $\square\square$ は2桁(けた)の正の整数を表す。3個以上並んだ場合も同様である。

3)　$\square$ の前に「－」がついている場合は負の整数を表す。例えば，$-\square$ は1桁の負の整数を表し，$-\square\square$ は2桁の負の整数を表す。

4)　$\dfrac{\square}{\square}$，$\dfrac{\square}{\square\square}$，$-\dfrac{\square}{\square}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。

5)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば，$\square\sqrt{\square}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。

6)　選択肢から一つを選んで，番号を答える場合もある。

I　a を正の実数とする。座標平面上に放物線 $C : y = x^2 - 2ax + a^2 + 2$ と直線 $\ell : y = -2ax + 7$ がある。C の頂点を P とする。

(1)　P の y 座標は $\boxed{1}$ である。

(2)　C と ℓ は異なる 2 点で交わるとし，C と ℓ の交点を x 座標の小さい順に Q，R とする。

(i)　$a = 1$ のとき，R の x 座標は $\boxed{2}$ であり，線分 QR の長さは $\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}$ である。

(ii)　ℓ が P を通るとき，$a = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\sqrt{\boxed{7}\boxed{8}}$ である。

(iii)　ℓ が P を通らず，かつ直線 PQ と直線 PR が直交するとき，$a = \sqrt{\boxed{9}}$ であり，線分 QR の長さは $\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ である。

(3)　C と ℓ は点 S で接するとし，P における C の接線を m とする。このとき，$a = \sqrt{\boxed{12}}$ であり，S の x 座標は $\boxed{13}$ である。また，2 つの直線 ℓ, m と放物線 C で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}\boxed{16}}\sqrt{\boxed{17}}$ である。

（計　算　用　紙）

II　θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とする。原点を O とする座標平面上に，2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ と $\mathrm{Q}(2\sin 2\theta, 2\cos 2\theta)$ がある。線分 PQ を 1 : 2 に内分する点を R とする。

(1)　$\theta = \dfrac{1}{3}\pi$ とする。このとき，Q の x 座標は $\sqrt{\square^{18}}$ であり，三角形 OQR の面積は $\dfrac{\square^{19}}{\square^{20}}$ である。

(2)　3 点 O，P，Q が一直線上にある θ の値は全部で $\square^{21}$ 個あり，そのうち最大のものを α とする。このとき，$\alpha = \dfrac{\square^{22}}{\square^{23}}\pi$ であり，$\theta = \alpha$ のとき R の y 座標は $\dfrac{\square^{24}}{\square^{25}}$ である。

(3)　R の x 座標が正でかつ y 座標が最大となるとき，R の x 座標は $\dfrac{\square^{26}}{\square^{27}}\sqrt{\square^{28}\square^{29}}$ である。

(4)　3 点 O，P，Q が一直線上になく，かつ三角形 OPQ の面積が $\dfrac{1}{2}$ となる θ の値のうち 2 番目に大きいものを β とする。このとき，$\beta = \dfrac{\square^{30}}{\square^{31}}\pi$ である。また，線分 OR の長さを d とすると，$\theta = \beta$ のとき

$$d^2 = \frac{\square^{32}}{\square^{33}} + \frac{\square^{34}}{\square^{35}}\sqrt{\square^{36}}$$

である。

（計　算　用　紙）

III　座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数となる点を格子点と呼ぶことにする。格子点のうち異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。ただし，3 点が一直線上にある場合は三角形とはみなさないとする。

(1)　6 個の格子点 $(1,0)$，$(2,0)$，$(3,1)$，$(2,2)$，$(1,2)$，$(0,1)$ のうち，異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき，三角形は全部で $\square^{37}\square^{38}$ 個ある。また，直角三角形は全部で $\square^{39}$ 個あり，二等辺三角形は全部で $\square^{40}$ 個ある。

(2)　8 個の格子点 $(1,0)$，$(2,0)$，$(3,1)$，$(3,2)$，$(2,3)$，$(1,3)$，$(0,2)$，$(0,1)$ のうち，異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき，直角三角形は全部で $\square^{41}\square^{42}$ 個ある。また，面積が 1 以上の三角形は全部で $\square^{43}\square^{44}$ 個ある。

(3)　12 個の格子点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$，$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,3)$，$(2,3)$，$(1,3)$，$(0,3)$，$(0,2)$，$(0,1)$ のうち，異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき，直角三角形は全部で $\square^{45}\square^{46}$ 個ある。また，面積が 2 以上の三角形は全部で $\square^{47}\square^{48}$ 個ある。

（計　算　用　紙）