

数 学

(解答番号 $^1 \square \sim ^{48} \square$)

解答上の注意

- 1) 問題の文中の $^1 \square$, $^2 \square$ などの一つ一つには、特に指示のない限り、それぞれ 0 から 9 までの数字が一つ入る。 $\square$ の左上の数字は「解答番号」である。
- 2) 2 個並んだ $\square \square$ は 2 桁(けた)の正の整数を表す。3 個以上並んだ場合も同様である。
- 3) $\square$ の前に「-」がついている場合は負の整数を表す。例えば、 $-\square$ は 1 桁の負の整数を表し、 $-\square\square$ は 2 桁の負の整数を表す。
- 4) $\frac{\square}{\square}$, $\frac{\square}{\square\square}$, $-\frac{\square}{\square}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。
- 5) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば、 $\square\sqrt{\square}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。
- 6) 選択肢から一つを選んで、番号を答える場合もある。

I a を正の実数とする。座標平面上に放物線 $C: y = x^2 - 2ax + a^2 + 2$ と直線 $\ell: y = -2ax + 7$ がある。 C の頂点を P とする。

(1) P の y 座標は $^1\boxed{}$ である。

(2) C と ℓ は異なる 2 点で交わるとし、 C と ℓ の交点を x 座標の小さい順に Q, R とする。

(i) $a = 1$ のとき、 R の x 座標は $^2\boxed{}$ であり、線分 QR の長さは $^3\boxed{}\sqrt{^4\boxed{}}$ である。

(ii) ℓ が P を通るとき、 $a = \frac{^5\boxed{}}{^6\boxed{}}\sqrt{^7\boxed{}^8\boxed{}}$ である。

(iii) ℓ が P を通らず、かつ直線 PQ と直線 PR が直交するとき、 $a = \sqrt{^9\boxed{}}$ であり、線分 QR の長さは $^{10}\boxed{}\sqrt{^{11}\boxed{}}$ である。

(3) C と ℓ は点 S で接するとし、 P における C の接線を m とする。このとき、 $a = \sqrt{^{12}\boxed{}}$ であり、 S の x 座標は $^{13}\boxed{}$ である。また、2 つの直線 ℓ, m

と放物線 C で囲まれた図形の面積は $\frac{^{14}\boxed{}}{^{15}\boxed{}^{16}\boxed{}}\sqrt{^{17}\boxed{}}$ である。

(計 算 用 紙)

II θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす実数とする。原点を O とする座標平面上に、2 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と $Q(2 \sin 2\theta, 2 \cos 2\theta)$ がある。線分 PQ を $1:2$ に内分する点を R とする。

(1) $\theta = \frac{1}{3}\pi$ とする。このとき、 Q の x 座標は $\sqrt{18} \frac{\square}{\square}$ であり、三角形 OQR の面積は $\frac{19 \square}{20 \square}$ である。

(2) 3 点 O, P, Q が一直線上にある θ の値は全部で $^{21}\square$ 個あり、そのうち最大のものを α とする。このとき、 $\alpha = \frac{^{22}\square}{_{23}\square} \pi$ であり、 $\theta = \alpha$ のとき R の y 座標は $\frac{^{24}\square}{_{25}\square}$ である。

(3) R の x 座標が正でかつ y 座標が最大となるときの、 R の x 座標は $\frac{^{26}\square}{_{27}\square} \sqrt{^{28}\square \ ^{29}\square}$ である。

(4) 3 点 O, P, Q が一直線上になく、かつ三角形 OPQ の面積が $\frac{1}{2}$ となる θ の値のうち 2 番目に大きいものを β とする。このとき、 $\beta = \frac{^{30}\square}{_{31}\square} \pi$ である。また、線分 OR の長さを d とすると、 $\theta = \beta$ のとき

$$d^2 = \frac{^{32}\square}{_{33}\square} + \frac{^{34}\square}{_{35}\square} \sqrt{^{36}\square}$$

である。

(計 算 用 紙)

III 座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数となる点を格子点と呼ぶことにする。格子点のうち異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。ただし、3 点が一直線上にある場合は三角形とはみなさないとする。

(1) 6 個の格子点 $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(0,1)$ のうち、異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき、三角形は全部で ³⁷ ³⁸ 個ある。また、直角三角形は全部で ³⁹ 個あり、二等辺三角形は全部で ⁴⁰ 個ある。

(2) 8 個の格子点 $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$ のうち、異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき、直角三角形は全部で ⁴¹ ⁴² 個ある。また、面積が 1 以上の三角形は全部で ⁴³ ⁴⁴ 個ある。

(3) 12 個の格子点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(2,3)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$ のうち、異なる 3 点を結んでできる三角形を考える。このとき、直角三角形は全部で ⁴⁵ ⁴⁶ 個ある。また、面積が 2 以上の三角形は全部で ⁴⁷ ⁴⁸ 個ある。

(計 算 用 紙)