

数 学

(解答番号 $^1 \square \sim ^{51} \square$)

解答上の注意

- 1) 問題の文中の $^1 \square$, $^2 \square$ などの一つ一つには、特に指示のない限り、それぞれ 0 から 9 までの数字が一つ入る。 $\square$ の左上の数字は「解答番号」である。
- 2) 2 個並んだ $\square \square$ は 2 桁(けた)の正の整数を表す。3 個以上並んだ場合も同様である。
- 3) $\square$ の前に「-」がついている場合は負の整数を表す。例えば、 $-\square$ は 1 桁の負の整数を表し、 $-\square\square$ は 2 桁の負の整数を表す。
- 4) $\frac{\square}{\square}$, $\frac{\square}{\square\square}$, $-\frac{\square}{\square}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。
- 5) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば、 $\square\sqrt{\square}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。
- 6) 選択肢から一つを選んで、番号を答える場合もある。

I 実数 x に対して、 $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。例えば、
 $[2] = 2$, $[3.1] = 3$, $[-4.1] = -5$ である。

(1) $x^2 - x - \frac{1}{2} < 0$ が成り立つとき、実数 x のとりうる値の範囲は

$$\frac{{}^1\boxed{} - \sqrt{{}^2\boxed{}}}{3\boxed{}} < x < \frac{{}^4\boxed{} + \sqrt{{}^5\boxed{}}}{6\boxed{}} \text{ である。}$$

(2) $a^2 - a - \frac{1}{2} < 0$ を満たす整数 a の値は、小さい方から順に ${}^7\boxed{}$, ${}^8\boxed{}$ である。

(3) $[x]^2 - [x] - \frac{1}{2} < 0$ が成り立つとき、実数 x のとりうる値の範囲は
 ${}^9\boxed{} \leq x < {}^{10}\boxed{}$ である。

(4) $x^2 - [x] - \frac{1}{2} = 0$ を満たす実数 x の値は、小さい方から順に

$$\frac{\sqrt{{}^{11}\boxed{}}}{12\boxed{}}, \frac{\sqrt{{}^{13}\boxed{}}}{14\boxed{}} \text{ である。}$$

(5) $[x^2] - x - \frac{1}{2} = 0$ を満たす実数 x の値は、小さい方から順に

$$-\frac{{}^{15}\boxed{}}{16\boxed{}}, \frac{{}^{17}\boxed{}}{18\boxed{}} \text{ である。}$$

(計 算 用 紙)

- II (1) 三角形 ABC において, 辺 BC, CA, AB の長さを, それぞれ a, b, c で表し, $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを, それぞれ A, B, C で表す。

(i) $a \sin A + b \sin B = c \sin C$ が成り立つとき, $C = \overset{19}{\square} \overset{20}{\square}^\circ$ である。

(ii) $bc \cos A = ca \cos B = ab \cos C$ が成り立つとき, $C = \overset{21}{\square} \overset{22}{\square}^\circ$ である。

(iii) $a \sin^2 A - b \sin^2 B - (a - b) \sin^2 C = 0$ および $a \neq b$ が成り立つとき, $C = \overset{23}{\square} \overset{24}{\square} \overset{25}{\square}^\circ$ である。

- (2) k を実数とし, x についての方程式

$$\left\{ \log_{10}(x^2 + \sqrt{10}) \right\}^2 - 10 \log_{10}(x^2 + \sqrt{10}) = k$$

を考える。

(i) $\log_{10}(x^2 + \sqrt{10})$ の最小値は $\frac{\overset{26}{\square}}{\overset{27}{\square}}$ である。

- (ii) 方程式が実数解をもたないとき, k のとりうる値の範囲は

$$k < -\overset{28}{\square} \overset{29}{\square} \text{ である。}$$

(iii) 方程式の実数解の個数が 3 個となる k の値は $k = -\frac{\overset{30}{\square} \overset{31}{\square}}{\overset{32}{\square}}$ である。

- (iv) 方程式の実数解の個数が 4 個となるとき, k のとりうる値の範囲は

$$-\overset{33}{\square} \overset{34}{\square} < k < -\frac{\overset{35}{\square} \overset{36}{\square}}{\overset{37}{\square}} \text{ である。}$$

(計 算 用 紙)

III a, b は正の定数とし, 座標平面上で

$$\text{円 } C_1: x^2 + y^2 = 4, \quad \text{放物線 } C_2: y = ax^2 + b$$

を考える。ここで, C_2 の頂点 Q は C_1 上にあるとする。また, C_1 上の点 $P(\sqrt{3}, -1)$ における C_1 の接線を ℓ とすると, ℓ は C_2 と接している。

(1) $b = \frac{38}{\square}$ であり, ℓ の方程式は $y = \sqrt{\frac{39}{\square}} x - \frac{40}{\square}$ である。

(2) $a = \frac{\frac{41}{\square}}{\frac{42}{\square}}$ であり, ℓ と C_2 の接点の座標は $\left(\frac{43}{\square} \sqrt{\frac{44}{\square}}, \frac{45}{\square} \right)$ である。

(3) C_2, ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{46}{\square} \sqrt{\frac{47}{\square}}$ である。

(4) 不等式 $x \geq 0$ の表す領域に含まれる C_1 の弧 PQ を C_3 とする。 C_2, C_3 および ℓ で囲まれた図形の面積は $\frac{48}{\square} \sqrt{\frac{49}{\square}} - \frac{\frac{50}{\square}}{\frac{51}{\square}} \pi$ である。

(計 算 用 紙)