

数 学

(解答番号 $^1 \square \sim ^{52} \square$)

解答上の注意

- 1) 問題の文中の $^1 \square$, $^2 \square$ などの一つ一つには、特に指示のない限り、それぞれ 0 から 9 までの数字が一つ入る。 $\square$ の左上の数字は「解答番号」である。
- 2) 2 個並んだ $\square \square$ は 2 桁(けた)の正の整数を表す。3 個以上並んだ場合も同様である。
- 3) $\square$ の前に「-」がついている場合は負の整数を表す。例えば、 $-\square$ は 1 桁の負の整数を表し、 $-\square\square$ は 2 桁の負の整数を表す。
- 4) $\frac{\square}{\square}$, $\frac{\square}{\square\square}$, $-\frac{\square}{\square}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えること。
- 5) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば、 $\square\sqrt{\square}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。
- 6) 選択肢から一つを選んで、番号を答える場合もある。

I 大小 2 つのさいころを投げ、出た目をそれぞれ a, b とし、

$$A = \sin \frac{a\pi}{4}, \quad B = \cos \frac{b\pi}{4}$$

とする。

(1) $A = 0$ となる確率は $\frac{\overset{1}{\square}}{\underset{2}{\square}}$ である。

(2) $B = 0$ となる確率は $\frac{\overset{3}{\square}}{\underset{4}{\square}}$ である。

(3) $AB = 0$ となる確率は $\frac{\overset{5}{\square}}{\underset{6}{\square}}$ である。

(4) $AB < 0$ となる確率は $\frac{\overset{7}{\square} \overset{8}{\square}}{\underset{9}{\square} \underset{10}{\square}}$ である。

(5) $A + B = 0$ となる確率は $\frac{\overset{11}{\square}}{\underset{12}{\square}}$ である。

(6) $A + B$ が無理数となる確率は $\frac{\overset{13}{\square} \overset{14}{\square}}{\underset{15}{\square} \underset{16}{\square}}$ である。

(計 算 用 紙)

II (1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1013, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(i) $a_n \leq 100$ となる最小の n の値は $^{17}\square$ である。

(ii) $a_n \leq 10$ となる最小の n の値は $^{18}\square$ $^{19}\square$ である。

(iii) $\sum_{k=1}^n a_k \geq 2025$ を満たす最小の n の値は
 $^{20}\square$ $^{21}\square$ $^{22}\square$ $^{23}\square$ である。

(2) 実数 x, y は $x^2 + y^2 = 1$ を満たしている。 $z = 11x^2 + 24xy + y^2$ とする。

(i) $x = \frac{1}{2}$ のとき, y の値は小さい方から順に $-\frac{\sqrt{24}\square}{25\square}, \frac{\sqrt{26}\square}{27\square}$ である。

(ii) z の最小値は $-^{28}\square$ であり, 最大値は $^{29}\square$ $^{30}\square$ である。

(iii) z の最大値を与える x, y の組は全部で $^{31}\square$ 個ある。これらの組における x の値のうち, 最大であるものは $x = \frac{^{32}\square \sqrt{^{33}\square} \square}{^{35}\square \square}$ である。

(計 算 用 紙)

III a を実数とし、座標平面上で 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2 - 8x + 17$$

$$C_2 : y = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$$

を考える。 C_1 の頂点を P, C_2 の頂点を Q とする。

- (1) 点 P の座標は $\left(\begin{smallmatrix} 37 \\ \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 38 \\ \square \end{smallmatrix} \right)$ である。また、 a がすべての実数値をとって変化するとき、Q の軌跡は直線 $y = \begin{smallmatrix} 39 \\ \square \end{smallmatrix} x$ である。

- (2) 線分 PQ の長さは、 $a = \frac{\begin{smallmatrix} 40 \\ \square \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} 41 \\ \square \end{smallmatrix}}$ のとき最小となり、

そのとき $PQ = \frac{\begin{smallmatrix} 42 \\ \square \end{smallmatrix} \sqrt{\begin{smallmatrix} 43 \\ \square \end{smallmatrix}}}{\begin{smallmatrix} 44 \\ \square \end{smallmatrix}}$ である。

- (3) C_1 と C_2 が異なる 2 つの共有点をもつとき、 a のとりうる値の範囲は

$$\begin{smallmatrix} 45 \\ \square \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 46 \\ \square \end{smallmatrix} \sqrt{\begin{smallmatrix} 47 \\ \square \end{smallmatrix}} < a < \begin{smallmatrix} 48 \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 49 \\ \square \end{smallmatrix} \sqrt{\begin{smallmatrix} 50 \\ \square \end{smallmatrix}}$$

である。

- (4) C_2 と x 軸が異なる 2 つの共有点をもつとする。 C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積が 288 となるのは $a = \begin{smallmatrix} 51 \\ \square \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 52 \\ \square \end{smallmatrix}$ のときである。

(計 算 用 紙)