数　　学

（解答番号 $\boxed{}^{1}$ ～ $\boxed{}^{51}$）

解答上の注意

1)　問題の文中の $^{1}\boxed{}$，$^{2}\boxed{}$ などの一つ一つには，特に指示のないかぎり，それぞれ０から９までの数字が一つ入る。$\boxed{}$ の左上の数字は「解答番号」である。

2)　２個並んだ $\boxed{}\ \boxed{}$ は２桁（けた）の正の整数を表す。３個以上並んだ場合も同様である。

3)　$\boxed{}$ の前に「－」がついている場合は負の整数を表す。例えば，$-\boxed{}$ は１桁の負の整数を表し，$-\boxed{}\ \boxed{}$ は２桁の負の整数を表す。

4)　$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}\ \boxed{}}$，$-\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ などは分数を表す。分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えること。

5)　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。例えば，$\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはならない。

6)　選択肢から一つを選んで，番号を答える場合もある。

I　t を実数とする。O を原点とする座標空間に 2 点 $\mathrm{P}(2t,\ t-2,\ t^2)$, $\mathrm{Q}(t^2-3,\ t,\ -2t+3)$ がある。

(1)　P が xz 平面上にあるのは $t = {}^{1}\boxed{}$ のときであり, Q が xy 平面上にあるのは $t = \dfrac{{}^{2}\boxed{}}{{}^{3}\boxed{}}$ のときである。

(2)　OP = OQ となるときの t の値は, 小さい方から順に $-\dfrac{{}^{4}\boxed{}}{{}^{5}\boxed{}}$, ${}^{6}\boxed{}$ である。

(3)　$t > 0$ であって, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直であるとき, t の値は ${}^{7}\boxed{}$ である。このとき, 三角形 OPQ の面積は ${}^{8}\boxed{}\sqrt{{}^{9}\boxed{}}$ である。

(4)　PQ が最小となるときの t の値は, 小さい方から順に $-{}^{10}\boxed{}$, ${}^{11}\boxed{}$ である。また, PQ の最小値は ${}^{12}\boxed{}\sqrt{{}^{13}\boxed{}}$ である。

（計　算　用　紙）

II　a を実数とし，以下の関数 $f(x)$ を考える。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$$f(x) = (\sin x + \cos x)(2\sin x\cos x - 5) - 6\sin x\cos x + a$$

また，$t = \sin x + \cos x$ とおく。

(1)　t のとりうる値の範囲は，$-\sqrt{{}^{14}\boxed{}} \leqq t \leqq \sqrt{{}^{15}\boxed{}}$ である。

(2)　$f(x)$ を t の式で表すと $t^3 - {}^{16}\boxed{}\,t^2 - {}^{17}\boxed{}\,t + {}^{18}\boxed{} + a$ である。

(3)　$f(x)$ が最小となるのは $x = \dfrac{{}^{19}\boxed{}}{{}^{20}\boxed{}}\pi$ のときである。また，$f(x)$ の最小値が 0 となるのは $a = {}^{21}\boxed{} + {}^{22}\boxed{}\sqrt{{}^{23}\boxed{}}$ のときである。

(4)　$f(x)$ の最大値が 0 となるのは $a = {}^{24}\boxed{} - {}^{25}\boxed{}\sqrt{{}^{26}\boxed{}}$ のときである。

(5)　$a = 5$ のとき，$f(x) = 0$ の解は，小さい方から順に $x = {}^{27}\boxed{}$，$\dfrac{{}^{28}\boxed{}}{{}^{29}\boxed{}}\pi$ である。

（計　算　用　紙）

III　n は自然数とする。2 つの変量 x, y について, それぞれ $2n$ 個のデータが

$$x_k = 2k-1, \quad y_k = 4\left[\frac{k}{2}\right] \qquad (k = 1, 2, \cdots, 2n)$$

であるとする。ここで, $[z]$ は実数 z を超えない最大の整数である。例えば, $[3] = 3$, $[3.5] = 3$ である。

(1)　$n = 10$ とする。

(i)　変量 x のデータの平均値は $^{30}\square\,^{31}\square$ であり, 分散は $^{32}\square\,^{33}\square\,^{34}\square$ である。

(ii)　変量 y のデータの平均値は $^{35}\square\,^{36}\square$ であり, 分散は $^{37}\square\,^{38}\square\,^{39}\square$ である。

(2)　変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ と分散 ${s_x}^2$ をそれぞれ n で表すと,

$$\overline{x} = {}^{40}\square\, n, \quad {s_x}^2 = \frac{^{41}\square}{^{42}\square} n^2 - \frac{^{43}\square}{^{44}\square}$$ である。

(3)　変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ と分散 ${s_y}^2$ をそれぞれ n で表すと,

$$\overline{y} = {}^{45}\square\, n, \quad {s_y}^2 = \frac{^{46}\square}{^{47}\square} n^2 + \frac{^{48}\square}{^{49}\square}$$ である。

(4)　新たな変量 e について, $2n$ 個のデータが

$$e_k = y_k - x_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, 2n)$$

であるとする。このとき, 変量 e のデータの平均値は $^{50}\square$ であり, 分散は $^{51}\square$ である。

（計　算　用　紙）