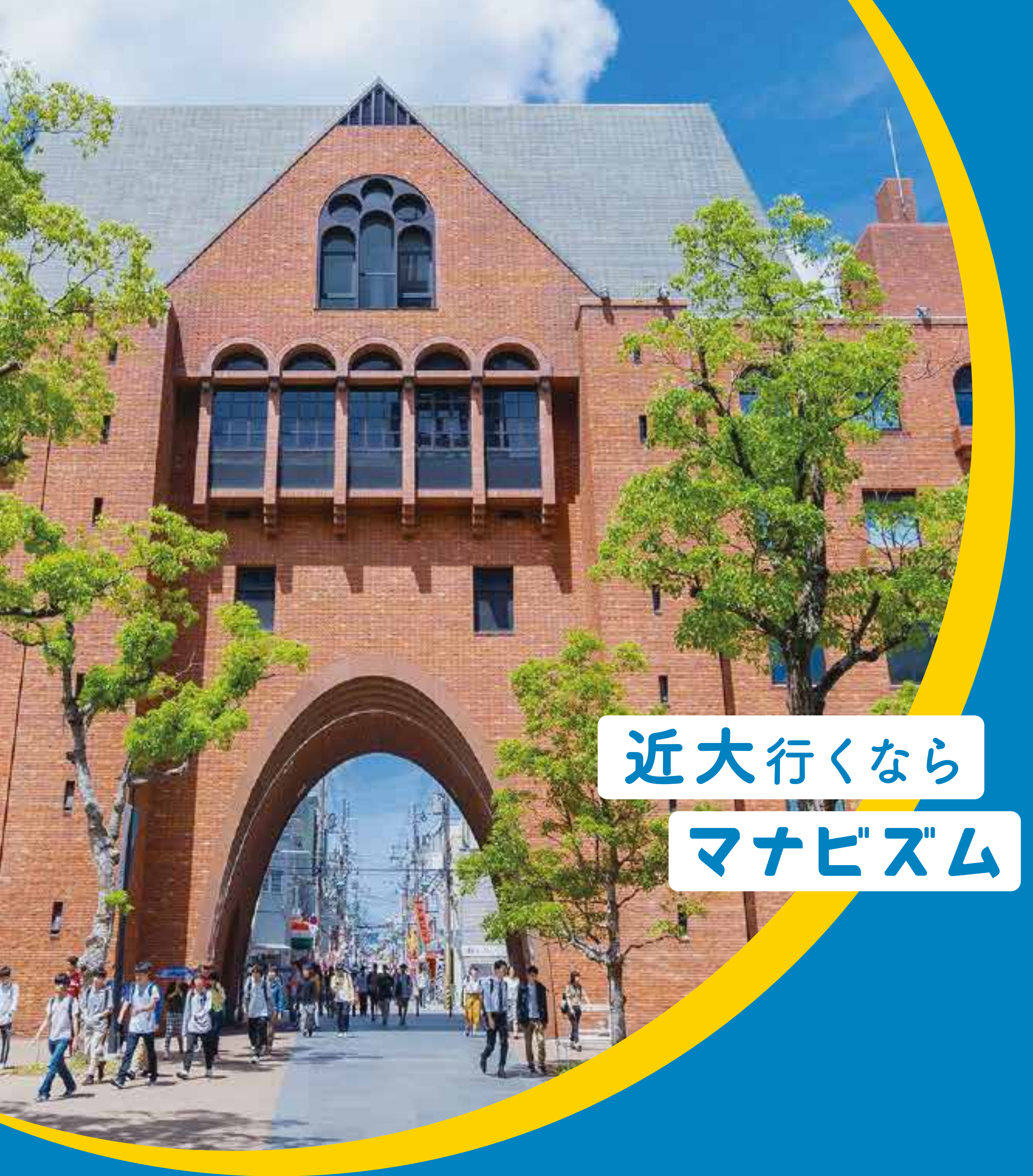


近大×マナビズム
過去問解説2023
テキスト 理系数学-1

近大理系数学-1の特徴と対策(概要)

全体像の把握が合否の鍵を握る。

全体像

	出題内容	問題数	配点	理想	時間配分
I	数学 I A II B	約5問	30~35点	21~25点	20分
II	数学 I A II B	約5問	30~35点	21~25点	20分
III	数学 I A II B	約5問	30~35点	21~25点	20分
	合計	約15問	100点	70点	60分

配点の割合

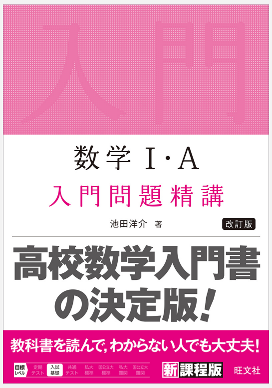
I	30~35点
II	30~35点
III	30~35点

近大理系数学-1の学習優先度 トップ3

- 微分・積分
- 場合の数・確率
- 数列・ベクトル

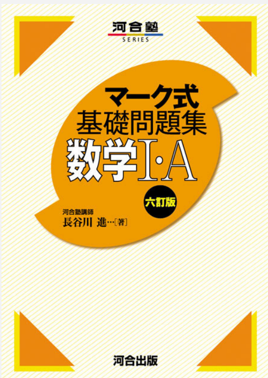
オススメ参考書

オススメ 1 入門問題精講IA・IIB



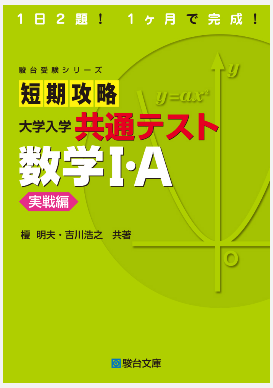
［目標習得期間］2ヶ月
［学習のポイント］
①重要事項を覚える
②丸暗記はNG
③例題は即座に解けるように

オススメ 2 マーク式基礎問題集IA・IIB



［目標習得期間］2～3ヶ月
［学習のポイント］
①解答の方針の言語化
②インプットに抜けがないかの確認
③問題の誘導を意識

オススメ 3 短期攻略 共通テスト 実践編IA・IIB



［目標習得期間］2～3か月
［学習のポイント］
①制限時間を意識
②★と★★→★★★の順に取り組む
③解説をすぐに見ずに考え抜く

1. 解答 (1) $p_4=7$，$p_6=13$

(2) $m_1=11$，$m_2=6$，$m_3=3$

(3) 77 組，x が最小のとき $(x,\ y)=(6,\ 5)$，x が最大のとき $(x,\ y)=(994,\ 841)$

(4) 780 個，720 個

解説

(1) 1 から 15 までの自然数に含まれる素数は 2，3，5，7，11，13 であるから

15! を素因数分解すると $15!=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdot 5^{m_3}\cdot 7^{m_4}\cdot 11^{m_5}\cdot 13^{m_6}$ と書ける

よって $p_1=2$，$p_2=3$，$p_3=5$，$p_4=7$，$p_5=11$，$p_6=13$

(2)

1 から 15 までの自然数の中に，2 の倍数は 7 個

1 から 15 までの自然数の中に，2^2 の倍数は 3 個

1 から 15 までの自然数の中に，2^3 の倍数は 1 個

よって，15! は 2 で $7+3+1=11$ 回割り切れるから，$m_1=11$

1 から 15 までの自然数の中に，3 の倍数は 5 個

1 から 15 までの自然数の中に，3^2 の倍数は 1 個

よって，15! は 3 で $5+1=6$ 回割り切れるから，$m_2=6$

1 から 15 までの自然数の中に，5 の倍数は 3 個

よって，15! は 5 で 3 回割り切れるから，$m_3=3$

参考

同様に考えていくと $15!=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\,(=1307674368000)$ と書ける

(3) $p_5=11$，$p_6=13$ より $11x-13y=1$ … ①

$x=6$，$y=5$ は ① の解の 1 組で $11\cdot 6-13\cdot 5=1$ … ②

①，② より $11x-13y=11\cdot 6-13\cdot 5$

よって $11(x-6)=13(y-5)$ … ③

11 と 13 は互いに素なので，k を整数として $x-6=13k$，$y-5=11k$ と表せる

よって $(x,\ y)=(13k+6,\ 11k+5)$

$\begin{cases}1\leqq x\leqq 1000\\1\leqq y\leqq 1000\end{cases}$ であるから $\begin{cases}-\dfrac{6}{13}\leqq k\leqq\dfrac{994}{13}\\-\dfrac{4}{11}\leqq k\leqq\dfrac{995}{11}\end{cases}$

すなわち $-\dfrac{4}{11}\leqq k\leqq\dfrac{994}{13}$

k は整数であるから $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 76$ の 77 個

x が最小となるのは $k=0$ のときで，$(x,\ y)=(6,\ 5)$

x が最大となるのは $k=76$ のときで，$(x,\ y)=(994,\ 841)$

(4)　全体集合を 1 から 1001 までの自然数として考える

またこのとき，集合 A，B，C とその要素の個数について，以下のように考える

A	7 の倍数	7，14，…，1001	143 個
B	11 の倍数	11，22，…，1001	91 個
C	13 の倍数	13，26，…，1001	77 個
A∩B	77 の倍数	77，154，…，1001	13 個
B∩C	143 の倍数	143，286，…，1001	7 個
C∩A	91 の倍数	91，182，…，1001	11 個
A∩B∩C	1001 の倍数	1001	1 個

(i)　$p_4p_5=7\cdot 11=77$

77 と互いに素な数は，7 の倍数でも 11 の倍数でもない数である

表より，1 から 1001 の中に，7 の倍数または 11 の倍数は

$143+91-13=221$ 個ある

よって，1 から 1001 の中に，7 の倍数でも 11 の倍数でもない数は

$1001-221=780$ 個ある

この 780 個はすべて 1 以上 1000 以下の値なので，求める答えも 780 個

(ii)　$p_4p_5p_6=7\cdot 11\cdot 13=1001$

1001と互いに素な数は，7の倍数でも11の倍数でも13の倍数でもない数である

表より，1から1001の中に，7の倍数または11の倍数または13の倍数は
$(143+91+77)-(13+7+11)+1=281$ 個ある

よって，1から1001の中に，7の倍数でも11の倍数でも13の倍数でもない数は
$1001-281=720$ 個ある

この720個はすべて1以上1000以下の値なので，求める答えも720個

2. $\boxed{\text{解答}}$ (1)　$\mathrm{AP}=6$，$\mathrm{QR}=6$，$\cos\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，面積は $6\sqrt{3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=12$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=24$

(3)　$p+q+r=1$，$(p,\ q,\ r)=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{5}{9}\right)$

(4)　$8\sqrt{2}$

解説

(1)　四面体 OPQR の頂点 O と，三角形 ABC の頂点 A，B，C がそれぞれ対応する（O と A，B，C は一致する）

よって，P，Q，R はそれぞれ辺 AB，BC，CA の中点である

ゆえに $\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$

$=6$

また，中点連結定理より

$$\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}=2\sqrt{7}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=6$$

$$\mathrm{RP}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=4$$

△PQR で余弦定理より $\cos\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{(2\sqrt{7})^2+6^2-4^2}{2\cdot2\sqrt{7}\cdot6}$

$$=\frac{7+9-4}{2\cdot\sqrt{7}\cdot3}\cdots(*)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$\boxed{\text{参考}}$

余弦定理は，辺の長さそのものはもちろん，辺の長さの比でも考えることが出来る。今回であれば $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RP}=\sqrt{7}:3:2$ であるから，(*) の部分が比で考えた場合の式である。(2) でも同様の計算を行うことができるので，工夫して計算を簡略化できるようにしておこう。

$$\begin{aligned}\sin^2\angle\mathrm{PQR}&=1-\cos^2\angle\mathrm{PQR}\\&=1-\frac{4}{7}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

$0°<\angle\mathrm{PQR}<180°$ より $\sin\angle\mathrm{PQR}>0$

よって $\sin\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$$=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}\sin\angle\mathrm{PQR}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{7}\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\\&=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{AP}=\mathrm{PB}=6$，$\mathrm{BQ}=\mathrm{QC}=4$，$\mathrm{CR}=\mathrm{RA}=2\sqrt{7}$ である

また，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=12:8:4\sqrt{7}$

$$=3:2:\sqrt{7}$$

$$\triangle \mathrm{ABC}\text{ で余弦定理より }\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{12^2+8^2-(4\sqrt{7})^2}{2\cdot 12\cdot 8}=\frac{9+4-7}{2\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{よって }\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\cos\angle \mathrm{ABC}=6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=12$$

$$\triangle \mathrm{ABC}\text{ で余弦定理より }\cos\angle \mathrm{ACB}=\frac{8^2+(4\sqrt{7})^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 4\sqrt{7}}=\frac{4+7-9}{2\cdot 2\cdot\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{よって }\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}=|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CR}}|\cos\angle \mathrm{ACB}=4\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}=4$$

$$\triangle \mathrm{ABC}\text{ で余弦定理より }\cos\angle \mathrm{BAC}=\frac{(4\sqrt{7})^2+12^2-8^2}{2\cdot 4\sqrt{7}\cdot 12}=\frac{7+9-4}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{よって }\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\angle \mathrm{BAC}=2\sqrt{7}\cdot 6\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=24$$

別解

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=6$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=2\sqrt{7}$ である

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=2\sqrt{7}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=(2\sqrt{7})^2$

よって $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=28$

ゆえに $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=28$

したがって $16-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+36=28$

整理して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=12$

($\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ も同様の手順で求められる)

(3)　H は平面 PQR 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=q\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+r\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ とおける

このとき
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+r\overrightarrow{\mathrm{PR}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+r(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=(1-q-r)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+r\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$

$1-q-r=p$ とすると $p+q+r=1$ … ①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{y}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{z}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{x}+q\vec{y}+r\vec{z}$

また，$|\vec{x}|=6$，$|\vec{y}|=4$，$|\vec{z}|=2\sqrt{7}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=12$，$\vec{y}\cdot\vec{z}=4$，$\vec{z}\cdot\vec{x}=24$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから $(p\vec{x}+q\vec{y}+r\vec{z})\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0$

よって $p\vec{x}\cdot\vec{y}+q|\vec{y}|^2+r\vec{z}\cdot\vec{y}-p|\vec{x}|^2-q\vec{y}\cdot\vec{x}-r\vec{z}\cdot\vec{x}=0$

整理して $6p-q+5r=0$ … ②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ であるから $(p\vec{x}+q\vec{y}+r\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{x})=0$

よって $p\vec{x}\cdot\vec{z}+q\vec{y}\cdot\vec{z}+r|\vec{z}|^2-p|\vec{x}|^2-q\vec{y}\cdot\vec{x}-r\vec{z}\cdot\vec{x}=0$

整理して $3p+2q-r=0$ … ③

② より $q=6p+5r$

これを ①，③ に代入して整理すると $\begin{cases}7p+6r=1\\5p+3r=0\end{cases}$

計算して $(p,\ q,\ r)=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{5}{9}\right)$

(4)　(3) より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{1}{3}\vec{x}+\dfrac{7}{9}\vec{y}+\dfrac{5}{9}\vec{z}$

$$=-\frac{1}{9}(3\vec{x}-7\vec{y}-5\vec{z})$$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\dfrac{1}{81}|3\vec{x}-7\vec{y}-5\vec{z}|^2$

$$=\frac{1}{81}(9|\vec{x}|^2+49|\vec{y}|^2+25|\vec{z}|^2-42\vec{x}\cdot\vec{y}+70\vec{y}\cdot\vec{z}-30\vec{z}\cdot\vec{x})$$

$$=\frac{1}{81}(324+784+700-504+280-720)$$

$$=\frac{864}{81}$$

$$=\frac{32}{3}$$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

以上より，四面体 OPQR の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$=8\sqrt{2}$$

3. 解答 (1) $f(0)=0$，$\dfrac{1}{9}<k<1$

(2) (i) $0<k<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}<k$

(ii) $-k^2+\dfrac{2}{3}k-\dfrac{1}{9}$

(iii) $-\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{5}{6}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{5}$

解説

(1) $f(x)=2x^3-(3k+1)x^2+2kx$ より $f(0)=0$

$f(x)=x\{2x^2-(3k+1)x+2k\}$ であるから，$g(x)=2x^2-(3k+1)x+2k$ とすると
$f(x)=xg(x)$ と書ける

$f(x)=0$ とすると $x=0$ または $g(x)=0$ であるから，$f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつのは，以下の[1]または[2]の場合である

[1] $g(x)=0$ が実数解をもたない

[2] $g(x)=0$ が $x=0$ を重解にもつ

[1]のとき

$g(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=\{-(3k+1)\}^2-4\cdot2\cdot2k\\&=9k^2-10k+1\\&=(9k-1)(k-1)\end{aligned}$$

$D<0$ であれば良いから $\dfrac{1}{9}<k<1$

[2]のとき

$3k+1=0$ および $2k=0$ が同時に成り立てば良いが，そのような k は存在しない
よって，$g(x)=0$ が $x=0$ を重解にもつことはない

[1]，[2]より $\dfrac{1}{9}<k<1$

(2)

(i)　$f(x)=2x^3-(3k+1)x^2+2kx$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-2(3k+1)x+2k \\ &=2\{3x^2-(3k+1)x+k\} \\ &=2(3x-1)(x-k) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=\dfrac{1}{3}$，k

関数 $f(x)$ が $x=\alpha$，$x=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$ で極値をとるとき，$k\neq\dfrac{1}{3}$ が必要であり，

$(\alpha,\ \beta)=\left(k,\ \dfrac{1}{3}\right)$ または $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{1}{3},\ k\right)$ である

$0<\alpha<\beta$ も考慮すると，k のとりうる値の範囲は $0<k<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}<k$

(ii)　$0<k<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}<k$ より，直線 l の傾き a は $a=\dfrac{f(k)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)}{k-\dfrac{1}{3}}$

ここで，分子について

$$\begin{aligned} f(k)-f\left(\frac{1}{3}\right)&=\{2k^3-(3k+1)k^2+2k^2\}-\left(\frac{2}{27}-\frac{3k+1}{9}+\frac{2}{3}k\right) \\ &=(-k^3+k^2)-\left(\frac{1}{3}k-\frac{1}{27}\right) \\ &=-\left(k^3-k^2+\frac{1}{3}k-\frac{1}{27}\right) \\ &=-\left(k-\frac{1}{3}\right)\left(k^2-\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

よって $a=-\left(k^2-\dfrac{2}{3}k+\dfrac{1}{9}\right)$

$$=-k^2+\frac{2}{3}k-\frac{1}{9}$$

(iii)　$k=\dfrac{4}{3}$ のとき $f(x)=2x^3-5x^2+\dfrac{8}{3}x$

直線 m : $y=bx$ とする

$f(x)=bx$ とすると $2x^3-5x^2+\dfrac{8}{3}x=bx$

よって $x\left(2x^2-5x+\dfrac{8}{3}-b\right)=0$

ここで，$y=f(x)$ と直線 m で囲まれた部分が 2 つ存在するのは，$y=f(x)$ と直線 m が異なる 3 つの共有点をもつとき，すなわち $x\left(2x^2-5x+\dfrac{8}{3}-b\right)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつときのみである。

$2x^2-5x+\dfrac{8}{3}-b=0$ の判別式を D^* とすると

$$D^*=(-5)^2-4\cdot 2\left(\frac{8}{3}-b\right)$$
$$=\frac{11}{3}+8b$$

$D^*>0$ であれば良いから $\dfrac{11}{3}+8b>0$

よって $b>-\dfrac{11}{24}$

$D^*>0\left(b>-\dfrac{11}{24}\right)$ のとき，$y=f(x)$ と直線 m の交点の x 座標は

$x=0$，$\dfrac{5\pm\sqrt{D^*}}{4}$ であり，これらの値が互いに異なるための条件は $\dfrac{5-\sqrt{D^*}}{4}\neq 0$

よって $\sqrt{D^*}\neq 5$

計算して $b\neq\dfrac{8}{3}$

したがって，$-\dfrac{11}{24}<b<\dfrac{8}{3}$ または $\dfrac{8}{3}<b$ の範囲で考えれば良い

以下では，$s=\dfrac{5-\sqrt{D^*}}{4}$，$t=\dfrac{5+\sqrt{D^*}}{4}$ とする

[1]　$-\dfrac{11}{24}<b<\dfrac{8}{3}$ のとき

$0<s<t$ であり，$y=f(x)$ と直線 m で囲まれる 2 つの部分の面積について，

$0\leqq x\leqq s$ の範囲で囲まれる部分の面積を S_1，

$s\leqq x\leqq t$ の範囲で囲まれる部分の面積を S_2 とする

条件より $S_1=S_2$

よって $\displaystyle\int_0^s\{f(x)-bx\}dx=\int_s^t\{bx-f(x)\}dx$

ゆえに $\displaystyle\int_0^s\{f(x)-bx\}dx=-\int_s^t\{f(x)-bx\}dx$

したがって $\displaystyle\int_0^s\{f(x)-bx\}dx+\int_s^t\{f(x)-bx\}dx=0$

よって $\displaystyle\int_0^t\{f(x)-bx\}dx=0$

ゆえに $\displaystyle\int_0^t\left\{2x^3-5x^2+\left(\frac{8}{3}-b\right)x\right\}dx=0$

したがって $\displaystyle\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)x^2\right]_0^t=0$

よって $\dfrac{1}{2}t^4-\dfrac{5}{3}t^3+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}-b\right)t^2=0$

$t>0$ であるから，t^2 で割って $\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{5}{3}t+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}-b\right)=0$ … ①

ここで，$x=t$ は $2x^2-5x+\dfrac{8}{3}-b=0$ の解であるから $2t^2-5t+\dfrac{8}{3}-b=0$ を満たす

よって $\dfrac{8}{3}-b=5t-2t^2$ … ②

② を ① に代入して $\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{3}t+\frac{5t-2t^2}{2}=0$

整理して $t(3t-5)=0$

$t>0$ より $t=\frac{5}{3}$

② より $b=2t^2-5t+\frac{8}{3}$

$=\frac{50}{9}-\frac{25}{3}+\frac{8}{3}$

$=-\frac{1}{9}$

$b=-\frac{1}{9}$ は $-\frac{11}{24}<b<\frac{8}{3}$ を満たす

[2] $\frac{8}{3}<b$ のとき

立式して計算し，整理すると $b=-\frac{11}{24}$ となるが，これは $\frac{8}{3}<b$ に不適

(計算過程については最後に記す)

[1], [2] より，直線 m : $y=-\frac{1}{9}x$

$k=\frac{4}{3}$ のとき $f(x)=2x^3-5x^2+\frac{8}{3}x$

また，(i) より $f'(x)=2(3x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{2}{3}(3x-1)(3x-4)$

$f'(x)=0$ の解は $x=\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ であり，$\alpha=\frac{1}{3}$ $\left(, \beta=\frac{4}{3}\right)$ である

よって $f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\frac{2}{27}-\frac{5}{9}+\frac{8}{9}$$

$$=\frac{11}{27}$$

さらに，(ii) より，直線 l の傾きは

$$a=-\frac{16}{9}+\frac{8}{9}-\frac{1}{9}$$

$$=-1$$

よって，直線 l の方程式は $y-\dfrac{11}{27}=-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

すなわち l：$y=-x+\dfrac{20}{27}$

これと m：$y=-\dfrac{1}{9}x$ を連立して $-x+\dfrac{20}{27}=-\dfrac{1}{9}x$

整理して $x=\dfrac{5}{6}$

直線 l，m が x 軸の正の向きとなす角度をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1=a$$

$$=-1$$

$$\tan\theta_2=b$$

$$=-\frac{1}{9}$$

このとき $\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)$

$$=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{9}+1}{1+\dfrac{1}{9}}$$

$$=\frac{4}{5}$$

参考

(2) の (iii) の面積計算

[2] $\dfrac{8}{3}<b$ のとき

$s<0<t$ であり，$y=f(x)$ と直線 m で囲まれる 2 つの部分の面積について，
$s\leqq x\leqq 0$ の範囲で囲まれる部分の面積を T_1,
$0\leqq x\leqq t$ の範囲で囲まれる部分の面積を T_2 とする

条件より $T_1=T_2$

よって $\displaystyle\int_s^0\{f(x)-bx\}dx=\int_0^t\{bx-f(x)\}dx$

ゆえに $\displaystyle\int_s^0\{f(x)-bx\}dx=-\int_0^t\{f(x)-bx\}dx$

したがって $\displaystyle\int_s^0\{f(x)-bx\}dx+\int_0^t\{f(x)-bx\}dx=0$

よって $\displaystyle\int_s^t\{f(x)-bx\}dx=0$

ゆえに $\displaystyle\int_s^t\left\{2x^3-5x^2+\left(\frac{8}{3}-b\right)x\right\}dx=0$

したがって $\displaystyle\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)x^2\right]_s^t=0$

よって $\displaystyle\left\{\frac{1}{2}t^4-\frac{5}{3}t^3+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)t^2\right\}-\left\{\frac{1}{2}s^4-\frac{5}{3}s^3+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)s^2\right\}=0$

ゆえに $\displaystyle\frac{1}{2}(t^4-s^4)-\frac{5}{3}(t^3-s^3)+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)(t^2-s^2)=0 \cdots (*)$

ここで
$t^2-s^2=(t-s)(t+s)$
$t^3-s^3=(t-s)(t^2+ts+s^2)$
$t^4-s^4=(t^2-s^2)(t^2+s^2)=(t-s)(t+s)(t^2+s^2)$
であるから，(*) の左辺は $(t-s)$ でくくることができる

さらに $s<0<t$ より $t>s$ であるから，(*) の両辺を $t-s$ で割って

$\displaystyle\frac{1}{2}(t+s)(t^2+s^2)-\frac{5}{3}(t^2+ts+s^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)(t+s)=0 \cdots (**)$

$2x^2-5x+\dfrac{8}{3}-b=0$ の解が $x=s,\ t$ であるから，解と係数の関係より

$s+t=-\dfrac{-5}{2}=\dfrac{5}{2}$，$st=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}-b\right)$

よって

$$\begin{aligned} t^2+s^2&=s^2+t^2\\ &=s^2+2st+t^2-2st\\ &=(s+t)^2-2st\\ &=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)\\ &=b+\frac{43}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2+ts+s^2&=(s^2+t^2)+st\\ &=\left(b+\frac{43}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-b\right)\\ &=\frac{1}{2}b+\frac{59}{12}\end{aligned}$$

これらを (**) に代入して $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\left(b+\dfrac{43}{12}\right)-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{59}{12}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}-b\right)\cdot\dfrac{5}{2}=0$

両辺 5 で割って $\dfrac{1}{4}\left(b+\dfrac{43}{12}\right)-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{59}{12}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{8}{3}-b\right)=0$

両辺 12 をかけて $3\left(b+\dfrac{43}{12}\right)-4\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{59}{12}\right)+3\left(\dfrac{8}{3}-b\right)=0$

よって $\left(3b+\dfrac{43}{4}\right)-\left(2b+\dfrac{59}{3}\right)+(8-3b)=0$

ゆえに $-2b-\dfrac{11}{12}=0$

したがって $b=-\dfrac{11}{24}$

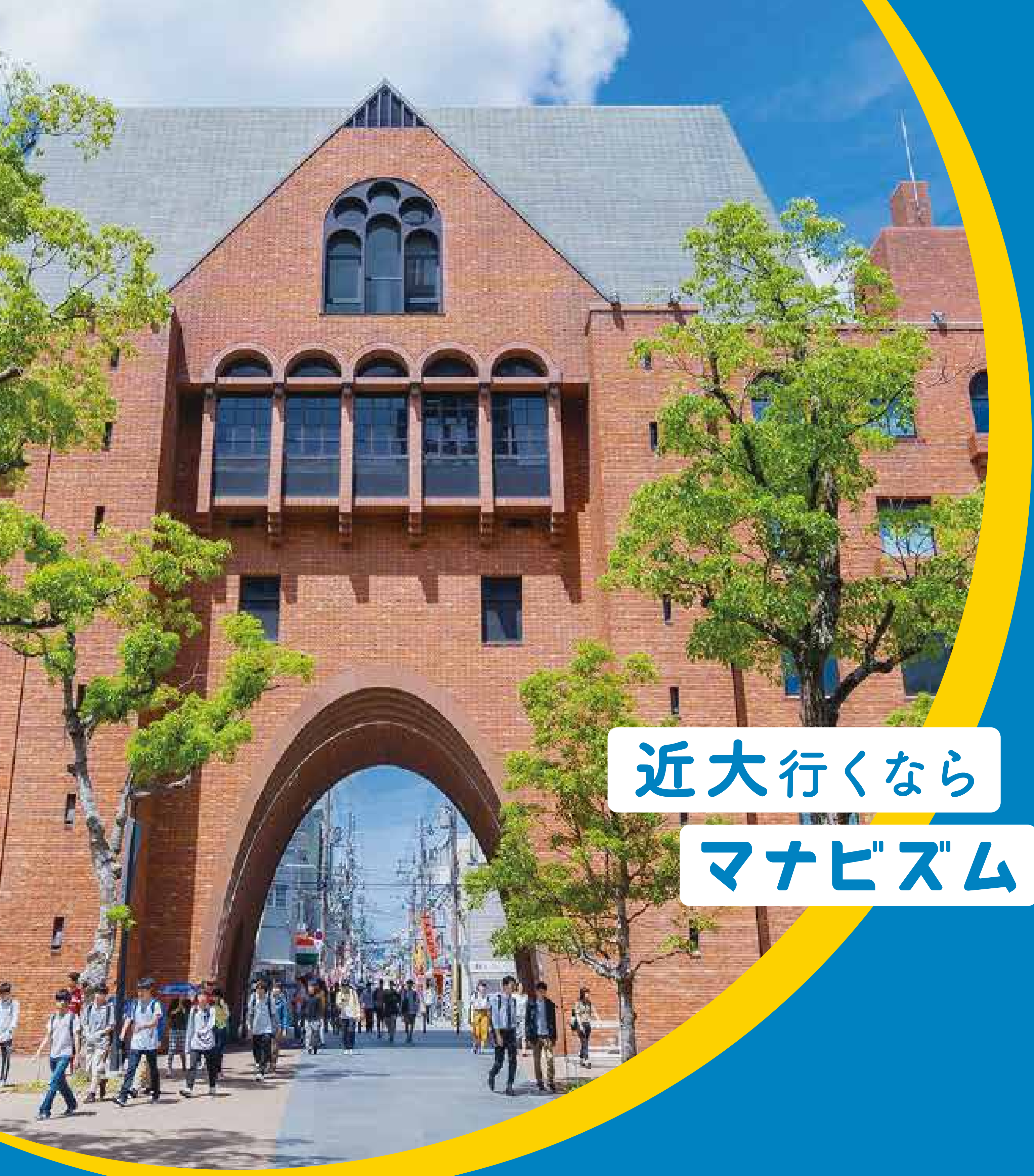
これは $\dfrac{8}{3}<b$ に不適

解答一覧

問題番号	解答番号	正解
I	ア	7
	イ	1
	ウ	3
	エ	1
	オ	1
	カ	6
	キ	3
	ク	7
	ケ	7
	コ	6
	サ	5
	シ	9
	ス	9
	セ	4
	ソ	8
	タ	4
	チ	1
	ツ	7
	テ	8
	ト	0
	ナ	7
	ニ	2
	ヌ	0

問題番号	解答番号	正解
II	ア	6
	イ	6
	ウ	2
	エ	7
	オ	7
	カ	6
	キ	3
	ク	1
	ケ	2
	コ	4
	サ	2
	シ	4
	ス	1
	セ	−
	ソ	1
	タ	3
	チ	7
	ツ	9
	テ	5
	ト	9
	ナ	8
	ニ	2

問題番号	解答番号	正解
III	ア	0
	イ	1
	ウ	9
	エ	1
	オ	0
	カ	1
	キ	3
	ク	1
	ケ	3
	コ	−
	サ	2
	シ	3
	ス	1
	セ	9
	ソ	−
	タ	1
	チ	9
	ツ	5
	テ	6
	ト	4
	ナ	5



マナビズム 校舎一覧

大阪府
- 上本町校
- 高槻校
- 豊中校
- 茨木校
- 北千里校
- 堺東校
- 枚方校
- 天王寺校
- 大阪梅田校

兵庫県
- 西宮北口校
- 神戸三宮校
- 姫路校

京都府
- 四条烏丸校

滋賀県
- 草津校

兵庫県
- 名古屋駅前校
- 豊田校

オンラインコース

無料受験相談
申込受付中