I　k を定数とする。座標平面で方程式

$$x^2+y^2+4kx-2ky+10k-10=0$$

で定まる円 C を考える。

(1)　C が k の値に関係なく常に通る点の座標は，x 座標が小さい順に $\left(-\overset{1}{\square},\ -\overset{2}{\square}\right)$, $\left(-\overset{3}{\square},\ \overset{4}{\square}\right)$ である。

(2)　C が原点 $(0,0)$ を通るとき，$k=\overset{5}{\square}$ である。

(3)　C の半径が最小となるとき，$k=\overset{6}{\square}$ である。そのときの C の中心の座標は $\left(-\overset{7}{\square},\ \overset{8}{\square}\right)$ であり，半径は $\sqrt{\overset{9}{\square}}$ である。

(4)　C が y 軸に接していて，接点の y 座標が 5 以上であるとき，

$$k=\overset{10}{\square}+\sqrt{\overset{11}{\square}\overset{12}{\square}}$$

である。

(5)　C が直線 $y=2x+\dfrac{5}{2}$ に接するとき，$k=\dfrac{\overset{13}{\square}}{\overset{14}{\square}}$ である。そのときの共有点の座標は $\left(-\overset{15}{\square},\ \dfrac{\overset{16}{\square}}{\overset{17}{\square}}\right)$ である。

(1) $$x^2+y^2+4kx-2ky+10k-10=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2+y^2-10)+2k(2x-y+5)=0$$

これを k についての恒等式と考えると,

$$x^2+y^2-10=0\ \text{ かつ }\ 2x-y+5=0$$

これらより, y を消去して,

$$x^2+(2x+5)^2-10=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+4x+3=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=-3,\ -1$$

したがって, $(x,\ y)=(-3,\ -1),\ (-1,\ 3)$

(2) C が原点 $(0,\ 0)$ を通るので,

$$0^2+0^2+4k\cdot 0-2k\cdot 0+10k-10=0$$

$$\Leftrightarrow\ 10k-10=0\ \Leftrightarrow\ k=1$$

(3) $$x^2+y^2+4kx-2ky+10k-10=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x+2k)^2+(y-k)^2=5k^2-10k+10$$

半径は $\sqrt{5k^2-10k+10}$ より,

$\sqrt{5(k-1)^2+5}$ となり, $k=1$ のとき, 半径は最小となる。

このとき, 中心の座標は $(-2k,\ k)=(-2,1)$, 半径は $\sqrt{5}$

(4)　円 C が y 軸と接するので,

$$\sqrt{5k^2-10k+10}=|-2k|$$

両辺を 2 乗して,

$$5k^2-10k+10=4k^2$$

$\Leftrightarrow\ k^2-10k+10=0\ \Leftrightarrow\ k=5\pm\sqrt{15}$

接点の y 座標は 5 以上なので, $k \geqq 5$

したがって, $k=5+\sqrt{15}$

(5)　円 C が直線 $y=2x+\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 4x-2y+5=0$ に接するので

中心 $(-2k,\ k)$ から直線 $4x-2y+5=0$ までの距離と半径 $\sqrt{5k^2-10k+10}$

が等しいので

$$\frac{|\,4\cdot(-2k)-2\cdot k+5\,|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\sqrt{5k^2-10k+10}$$

両辺を 2 乗して式を整理すると, $k=\dfrac{7}{4}$

また, 円 C と直線 (接線) の共有点は, 接線と法線の交点になる。

法線は傾き $-\dfrac{1}{2}$ であり, 円の中心 $\left(-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$ を通るので,

$$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{4}=-\frac{x}{2}$$

接線の方程式 $y=2x+\dfrac{5}{2}$ と法線の方程式 $y=-\dfrac{x}{2}$ を連立して,

$$(x,\ y)=\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$$

II　2 以上の自然数 n に対して，$ab_{(n)}$ は 2 桁(けた)の n 進数を表す。ここで，a, b は $1 \leqq a \leqq n-1,\ 0 \leqq b \leqq n-1$ を満たす整数である。4 桁の n 進数の場合も同様である。

(1)　2 桁の 22 進数 $20_{(22)}$ に対して，$20_{(22)} = ab_{(44)}$ が成り立つとき，a, b を 10 進法で表すと

$$a = {}^{18}\boxed{},\quad b = {}^{19}\boxed{}$$

である。

(2)　2 桁の 22 進数 $20_{(22)}$ に対して，$20_{(22)} = ab_{(23)}$ が成り立つとき，a, b を 10 進法で表すと

$$a = {}^{20}\boxed{},\quad b = {}^{21}\boxed{}\ {}^{22}\boxed{}$$

である。

(3)　4 桁の 2022 進数 $2022_{(2022)}$ に対して，$2022_{(2022)} = abcd_{(2023)}$ が成り立つとき，a, b, c, d を 10 進法で表すと

$$a = {}^{23}\boxed{},\quad b = {}^{24}\boxed{}\ {}^{25}\boxed{}\ {}^{26}\boxed{}\ {}^{27}\boxed{},\quad c = {}^{28}\boxed{},$$
$$d = {}^{29}\boxed{}\ {}^{30}\boxed{}\ {}^{31}\boxed{}\ {}^{32}\boxed{}$$

である。

(4)　$2 \leqq n \leqq 2022,\ 1 \leqq a \leqq n-1,\ 1 \leqq b \leqq n-1$ を満たす自然数 n, a, b を用いて

$$m = ab_{(n)} = ba_{(n+2)}$$

と表される自然数 m の総数は ${}^{33}\boxed{}\ {}^{34}\boxed{}\ {}^{35}\boxed{}\ {}^{36}\boxed{}$ であり，そのうち最小の m は ${}^{37}\boxed{}$ である。

(1) $\quad 20_{(22)} = 2 \times 22^1 + 0 \times 22^0 = 44$

$$ab_{(44)} = a \times 44^1 + b \times 44^0 = 44a + b$$

より， $20_{(22)} = ab_{(44)} \iff 44a + b = 44$

a, b は整数, $1 \leqq a \leqq 43,\ 0 \leqq b \leqq 43$ なので,

$$(a,\ b) = (1,\ 0)$$

(2) $\quad ab_{(23)} = a \times 23^1 + b \times 23^0 = 23a + b$

より， $20_{(22)} = ab_{(23)} \iff 23a + b = 44$

a, b は整数, $1 \leqq a \leqq 22,\ 0 \leqq b \leqq 22$ なので,

$$(a,\ b) = (1,\ 21)$$

(3) $\quad 2022_{(2022)} = 2 \times 2022^3 + 0 \times 2022^2 + 2 \times 2022^1 + 2 \times 2022^0$

$$abcd_{(2023)} = a \times 2023^3 + b \times 2023^2 + c \times 2023^1 + d \times 2023^0$$

$A = 2023$ として,

$$2022_{(2022)} = 2 \times (A-1)^3 + 0 \times (A-1)^2 + 2 \times (A-1)^1 + 2 \times (A-1)^0$$

$$abcd_{(2023)} = a \times A^3 + b \times A^2 + c \times A^1 + d \times A^0$$

なので， $2022_{(2022)} = abcd_{(2023)}$

$$\iff 2(A-1)^3 + 2(A-1) + 2 = aA^3 + bA^2 + cA + d$$

$$\iff 2A^3 - 6A^2 + 8A - 2 = aA^3 + bA^2 + cA + d$$

$$\iff A^3 + (A-6)A^2 + 7A + (A-2) = aA^3 + bA^2 + cA + d$$

a, b, c, d は整数であり,

$1 \leqq a \leqq 2022,\ 0 \leqq b \leqq 2022,\ 0 \leqq c \leqq 2022,\ 0 \leqq d \leqq 2022$ なので,

$$a = 1,\ A - 6 = b,\ 7 = c,\ A - 2 = d$$

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2017,\ 7,\ 2021)$$

(4) $\quad ab_{(n)} = a \times n^1 + b \times n^0$

$\quad ba_{(n+2)} = b \times (n+2)^1 + a \times (n+2)^0$

なので, $ab_{(n)} = ba_{(n+2)}$

$$\Leftrightarrow an + b = bn + a + 2b$$

$$\Leftrightarrow (a-b)n = a + b \cdots (a)$$

$1 \leqq a \leqq n-1,\ 1 \leqq b \leqq n-1$ なので, $2 \leqq a + b \leqq 2n - 2$

(a) より, $2 \leqq n(a-b) \leqq 2n - 2$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{n} \leqq a - b \leqq 2 - \frac{2}{n}$$

$2 \leqq n \leqq 2022$ より, $\ 0\ <\ a - b\ <\ 2$

$a - b$ は整数より, $a - b = 1\ \Leftrightarrow\ b = a - 1\ \cdots (b)$

(b) を (a) に代入して, $n = 2a - 1\ \cdots (c)$

$2 \leqq n \leqq 2022$ より, $\ 2 \leqq 2a - 1 \leqq 2022$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{2023}{2}$$

a は自然数より, $a = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots 1011$

$(b), (c)$ より, $(a,\ b, n) = (2,\ 1,\ 3),\ (3,\ 2,\ 5),\ (4,\ 3,\ 7) \cdots (1011,\ 1010,\ 2021)$

したがって, 求める m の個数は $1011 - 2 + 1 = 1010$ 個

$(a,\ b,\ n) = (2,\ 1,\ 3)$ のとき, m の最小値は $2 \cdot 3 + 1 = 7$

III　$x > 1$ において，関数

$$f(x) = \log_x 16x + \log_2 16x$$

を考える。$f(x)$ の最小値を m とする。また，次は常用対数表の一部である。

a	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
$\log_{10} a$	.4914	.5051	.5185	.5315	.5441	.5563	.5682	.5798	.5911	.6021

ただし，この表では 0.4914 を .4914 のように 0 を省略して表している。

(1)　$\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 7$ の小数第 2 位の数字は，それぞれ [38] $\square$, [39] $\square$, [40] $\square$, [41] $\square$ であり，$\log_2 3$ の小数第 1 位の数字は [42] $\square$ である。

(2)　$m =$ [43] $\square$ である。また，$f(x) = m$ となる x の値は $x =$ [44] $\square$ である。

(3)　方程式 $f(x) = m + 1$ の解は，小さい順に $x =$ [45] $\square$, [46] $\square$ [47] $\square$ である。

(4)　方程式 $f(x) = m + 2$ の解を，小さい順に $x = \alpha, \beta$ とする。

(i)　$\log_2 \beta =$ [48] $\square$ $+ \sqrt{[49]\ \square}$ である。これを小数で表したとき，その整数部分は [50] $\square$ であり，小数第 2 位の数字は [51] $\square$ である。

(ii)　α を超えない最大の整数は [52] $\square$ であり，β を超えない最大の整数は [53] $\square$ [54] $\square$ である。

(1) $$\log_{10} 2 = \log_{10} 4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_{10} 4$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.6021$$

$$= 0.30105$$

より, 小数第 2 位は 0

$$\log_{10} 3.6 = \log_{10} \frac{36}{10}$$

$$= \log_{10} 36 - \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} 2^2 \cdot 3^2 - 1$$

$$= 2 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 - 1$$

なので, $0.5563 = 2 \times 0.30105 + 2 \log_{10} 3 - 1$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 3 = 0.4771$$

より, 小数第 2 位は 7

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

$$= 1 - \log_{10} 2$$

$$= 1 - 0.30105$$

$$= 0.69895$$

より, 小数第 2 位は 9

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 7 &= \log_{10} 3.5 \times 2 \\
&= \log_{10} 3.5 + \log_{10} 2 \\
&= 0.5441 + 0.30105 \\
&= 0.84515
\end{aligned}
$$

より, 小数第 2 位は 4

$$
\begin{aligned}
\log_2 3 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\
&= \frac{0.4771}{0.30105} \\
&= 1.5847\cdots
\end{aligned}
$$

より, 小数第 1 位は 5

(2)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log_x 16x + \log_2 16x \\
&= \frac{\log_2 16x}{\log_2 x} + \log_2 16x \\
&= 5 + \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x}
\end{aligned}
$$

$x > 1$ より, $\log_2 x > 0$ であり, $\dfrac{4}{\log_2 x} > 0$ なので,

相加平均・相乗平均の関係を利用して,

$$
5 + \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} \geqq 5 + 2\sqrt{\log_2 x \times \frac{4}{\log_2 x}} = 9
$$

また, 等号成立は $\log_2 x = \dfrac{4}{\log_2 x} \iff (\log_2 x)^2 = 4$

$\log_2 x > 0$ なので $\log_2 x = 2 \iff x = 4$

したがって, $x=2$ のとき，最小値 $m=9$ となる。

(3)　(2) より, $m=9$ なので

$$f(x)=m+1 \Leftrightarrow \ f(x)=10$$

$$\Leftrightarrow \quad 5+\log_2 x+\frac{4}{\log_2 x}=10$$

$$\Leftrightarrow \quad (\log_2 x)^2-5\log_2 x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\log_2 x-1)(\log_2 x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \log_2 x=1,4$$

$$\Leftrightarrow \qquad x=2,\ 16 \quad (\text{これらは } x>1 \text{ を満たす})$$

(4)(i)　(2) より, $m=9$ なので

$$f(x)=m+2 \Leftrightarrow f(x)=11$$

$$\Leftrightarrow \quad 5+\log_2 x+\frac{4}{\log_2 x}=11$$

$$\Leftrightarrow \quad (\log_2 x)^2-6\log_2 x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2 x=3\pm\sqrt{5}$$

また, $f(x)=11$ の解のうち, 大きい方が β なので,

$$\log_2 \beta=3+\sqrt{5}$$

ここで,　$2 \leqq \sqrt{5} \leqq 3$

$$5 \leqq 3+\sqrt{5} \leqq 6$$

したがって，整数部分は 5

また，小数部分は $(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$

$$\sqrt{2.23^2} \leqq \sqrt{5} \leqq \sqrt{2.24^2}$$

なので，　$\sqrt{5} = 2.23\cdots$ より，$\sqrt{5}-2$ の小数第 2 位は 3

(4)(ii)　　$f(x) = 11$ の解のうち，小さい方が α なので，

$$\log_2 \alpha = 3 - \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2^{3-\sqrt{5}}$$

(i) より，$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ なので，$0.7 < 3 - \sqrt{5} < 0.8$ なので，

$$2^0 \ < \ \alpha = 2^{3-\sqrt{5}} \ < \ 2^1$$

したがって，α を超えない最大の整数は，1

また，$\log_2 \beta = 3 + \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} 2} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{10} \beta = (3 + \sqrt{5}) \log_{10} 2$$

$$5.23 < 3 + \sqrt{5} < 5.24$$

$$5.23 \cdot 0.30105 < (3 + \sqrt{5}) \log_{10} 2 < 5.24 \cdot 0.30105$$

$$1.5744 < \log_{10} \beta < 1.5775$$

$$0.5744 < \log_{10} \frac{\beta}{10} < 0.5775$$

$$\log_{10} 3.7 < \log_{10} \frac{\beta}{10} < \log_{10} 3.8$$

$$3.7 < \frac{\beta}{10} < 3.8$$

$$37 < \beta < 38$$

したがって，β を超えない最大の整数は，37

令和4年度　一般入試　前期A日程　[1月29日実施問題]解答と配点

文系数学「1/29」(法学部・経済学部・経営学部・文芸学部・総合社会学部・国際学部・情報学部・短期大学部)

問題番号	Ⅰ																
解答番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
正　解	3	1	1	3	1	1	2	1	5	5	1	5	7	4	1	1	2
配　点	3		3		3	3	3		3	4			5		3	2	

問題番号	Ⅱ																			
解答番号	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
正　解	1	0	1	2	1	1	2	0	1	7	7	2	0	2	1	1	0	1	0	7
配　点	3	3	3	3		2	2				2	2				5				5

問題番号	Ⅲ																
解答番号	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
正　解	0	7	9	4	5	9	4	2	1	6	3	5	5	3	1	3	7
配　点	2	3	3	3	2	2	2	3	3		3		3	3	3	3	