近畿大学数学対策

・出題形式

大問3題で、60分

マーク方式

☞考え方が正しくても計算ミスをすると点数に反映されないので、要注意（計算力は大切）！

☞ ある程度計算が多い解法でやっていってても、「正確に」＆「速く」計算していける力
「出来るだけ計算が少なくなるような解法」を意識する習慣

・出題分野

１つの大問の中で複数分野の理解を問う問題（融合問題）の存在も含めて、

バランスよく出題されている。

・合格ライン

自分が受験する学部学科の（最近の）合格最低点を強く意識しておく。

・[問題のレベル]＆[本番までの作戦]＆[本番における作戦]

☞文系問題から1問，理系問題から1問を実際に見ていくよ。

☞高校で配布されている（ことが多い）〔厚めの参考書（問題集）〕の例題（やそれに対応する練習問題）が全分野についてしっかり解ける力を付けておく。その後、過去問etcの演習。

☞本番では、上から解いていって、壁に当たったら次の問題へ（後で戻ってくる）。

・問題【1】

xを実数とし、tについての2次式$f(t)$を $f(t)=2t^2-8t+x+2$ とする。

次の(ｉ),(ⅱ)によって、xについての関数$g(x)$を定める。

(ｉ) 2次方程式$f(t)=0$が実数解をもたないxの値に対して、tについての多項式$f(t)$を$t-3$で割った余りを$g(x)$とする。

(ⅱ) 2次方程式$f(t)=0$が実数解をもつxの値に対して、tについての多項式$f(t)$を$2t-x$で割った余りを$g(x)$とする。

(1) 2次方程式$f(t)=0$が実数解をもつとき、xのとりうる値の範囲は $x\leqq\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $g(0)=\boxed{\text{イ}}$, $g(5)=-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$, $g(10)=\boxed{\text{オ}}$ である。

(3) $g(x)$が最小となるxの値は $\boxed{\text{カ}}$ であり、その最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4) xについての方程式$g(x)=5$の実数解は、小さい順に $x=\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である。

(5) 座標平面において、関数$y=g(x)$のグラフをCとする。C上の点$(5,\ g(5))$におけるCの接線をℓとする。

ℓの方程式は $y=\boxed{\text{ス}}x-\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。また、Cとℓで囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

・解答【１】

$f(t)=2t^2-8t+(x+2)$

(1) $D/4 \geqq 0 \Leftrightarrow 16-2(x+2) \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq 6$（ア）　〔２次方程式$f(t)=0$ ……① の判別式をDとおいたよ〕

(2) ☞(1)から$\begin{cases} ①が実数解をもたない \Leftrightarrow D<0 \Leftrightarrow 6<x \\ ①が実数解をもつ \Leftrightarrow D \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq 6 \end{cases}$　とわかったね。

☞だから（問題文より）、

$6<x$のとき：$g(x)=$〔$f(t)$を$t-3$で割った余り〕$=f(3)=2\cdot 3^2-8\cdot 3+(x+2)=x-4$

$x \leqq 6$のとき：$g(x)=$〔$f(t)$を$2t-x$で割った余り〕$=f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{x}{2}\right)^2-8\cdot\frac{x}{2}+(x+2)=\frac{1}{2}x^2-3x+2$

☞まとめると、$g(x)=\begin{cases} x-4 & (6<x) \\ \frac{1}{2}x^2-3x+2=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{5}{2} & (x \leqq 6) \end{cases}$

☞$\therefore\ g(0)=2$, $g(5)=-\frac{1}{2}$, $g(10)=6$（イウエオ）

(3) $\min.g(x)=g(3)=-\frac{5}{2}$（カキク）（板書図参照）

(4) $g(x)=5$ の実数解は、$\left[\dfrac{1}{2}x^2-3x+2=5\right.$ の小さい方の解$\left.\right]$ と $[x-4=5$ の解$]$ だね。(板書図参照)

つまり、$x=3-\sqrt{15}$, 9 だ。(ケコサシ)

(5) ☞曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(5\ ,\ g(5))$ における接線の式は $y-g(5)=g'(5)(x-5)$ $\quad\therefore\ y-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2(x-5)$

$\therefore\ y=2x-\dfrac{21}{2}$ ($=\ell(x)$ とおくよ) (スセソタ) $\quad\left[\because\ g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+2\right.$ より $\left.g'(x)=x-3\right]$

☞板書図を見て、求める面積は $S_1+S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot1^3+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{24}$ (チツテ)

$$\left[\because\ S_1=\int_5^6\{g(x)-\ell(x)\}\,dx=\int_5^6\frac{1}{2}(x-5)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_5^6(x-5)^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_5^6=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1^3\right]$$

・問題【2】

座標平面において、中心が原点Oで点$P(1\,,\,0)$を通る円C_1と、中心が点$Q(s\,,\,t)$で点Pを通る円C_2がある。ただし$t>0$とする。C_1とC_2のPではない交点をRとし、C_1の境界を含む内部とC_2の境界を含む内部の共通部分をDとする。

(1) 直線PRの方程式は $s(x-\boxed{ア})+ty=0$ である。

$s=0$のとき、点Rはtの値によらず同じ位置にあって、その座標は$(\boxed{イウ},\boxed{エ})$である。

(2) $s=\sqrt{3}\,t$のとき、点Rはsとtの値によらず同じ位置にあって、その座標は$\left(\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}\right)$である。

四角形$OPQR$は円に内接するとする。このとき、点Qの座標は$\left(\boxed{ケ},\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}\right)$である。

また、領域Dの面積は$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}\pi-\dfrac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$である。

(3) 点Qは$s+t=2$を満たしながら動くとする。

線分QRの長さが最小となるような点Rの座標は$\left(\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}},\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\right)$であり、このときの領域$D$の面積は$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{\boxed{ナ}}-\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$となる。 ただし、$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$である。

・解答【2】

$$\begin{cases} \text{円}C_1: \text{中心}O(0\,,\,0)\,,\ \text{点}P(1\,,\,0)\text{を通る}\cdots\cdots\ x^2+y^2=1 \\ \text{円}C_2: \text{中心}Q(s\,,\,t)\,,\ \text{点}P(1\,,\,0)\text{を通る}\cdots\cdots\ (x-s)^2+(y-t)^2=(s-1)^2+t^2\ \text{（ただし}t>0\text{）} \end{cases}$$

(1) ☞$PR: s(x-1)+ty=0$（ア）

$$\left[\ \text{[参考]}\ \begin{cases} C_1: x^2+y^2-1=0 \\ C_2: (x-s)^2+(y-t)^2-(s-1)^2-t^2=0 \end{cases} \\ \therefore\ PR:\ \left(x^2+y^2-1\right)-\left\{(x-s)^2+(y-t)^2-(s-1)^2-t^2\right\}=0\ \text{（これを整理する）}\ \right]$$

☞$s=0$のとき：板書図を見て（y軸対称性より）、$R(-1\,,\,0)$（イウエ）

(2) ☞$s=\sqrt{3}t$のとき$\left[Q(s\,,\,t)\right.$が直線$x=\sqrt{3}y\ \left(\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\right)$上にあるとき$\left.\right]$:

$PR:\sqrt{3}t(x-1)+ty=0$　　$\therefore\ \sqrt{3}(x-1)+y=0$だから（板書図を見て）、$R\left(\dfrac{1}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$（オカキク）

［参考］$\begin{cases} C_1:x^2+y^2=1 \\ PR:\sqrt{3}(x-1)+y=0 \end{cases}$ を連立してもいいけどね。

☞$\begin{cases}\text{「四角形}OPQR\text{は円に内接する」って（問題文に）あるけど、その円は「}\triangle OPR\text{の外接円」だよね。} \\ \triangle OPR\text{は（1辺の長さが1の）正三角形だから、外心は（重心に一致して）}G\left(\dfrac{1}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{だよね。} \\ \angle POQ=\dfrac{\pi}{6}\text{に注目すると、直線}OQ\text{は点}G\text{を通るよね（つまり}OQ\text{は直径）。}\end{cases}$

$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OG}=2\left(\dfrac{1}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=\left(1\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　$\therefore\ Q\left(1\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$（ケコサ）

☞$\angle POR=\dfrac{\pi}{3}$ だから、〔領域Dのうち直線PRより上側の部分〕$=\pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle PQR=\dfrac{2}{3}\pi$ だから、

〔領域Dのうち直線PRより下側の部分〕$=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

よって、領域Dの面積は $\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)=\dfrac{5}{18}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （シスセソタ）

(3) ☞$s+t=2$のとき [$Q(s\,,\,t)$が直線$x+y=2$（$\Leftrightarrow y=-x+2$）上にあるとき]:

［QRが最小］$\Leftrightarrow$［QPが最小］ であることに注意して、

Q$\left(\dfrac{3}{2}\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$とわかるよね。 ［☜$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=x-1 \end{cases}$ を連立］

点Rは、点Pを直線$OQ:y=\dfrac{1}{3}x$に関して対称移動した点だよね。

$\therefore\ \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=(1\,,\,0)+\dfrac{1}{5}(-1\,,\,3)=\left(\dfrac{4}{5}\,,\,\dfrac{3}{5}\right)$ $\qquad\therefore\ R\left(\dfrac{4}{5}\,,\,\dfrac{3}{5}\right)$ （チツテト）

［$\because\ P(1\,,\,0)$と直線$OQ:x-3y=0$のキョリは$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$だから、$\overrightarrow{PR}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1\,,\,3)=\dfrac{1}{5}(-1\,,\,3)$］

☞$\angle PQR=\theta$ とおくよ。$\overrightarrow{QP}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{QR}=\left(-\frac{7}{10},\ \frac{1}{10}\right)$ だから、

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{7}{20}+\left(-\frac{1}{20}\right)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$， $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta$

$\therefore\ \frac{1}{2}\cos\theta=\frac{3}{10}$　　$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{5}$　　$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}$　〔これでθは（問題文の）αと同じ角だとわかったね〕

$\angle POR=\beta$ とおくよ。$\overrightarrow{OP}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OR}=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ だから、

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{4}{5}$，　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=1\cdot 1\cdot\cos\beta=\cos\beta$　　$\therefore\ \cos\beta=\frac{4}{5}$　　$\therefore\ \sin\beta=\frac{3}{5}$

$\left[\text{[注]}\ \cos\beta=\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}\ \text{より、}\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$

よって、

〔領域Dのうち直線PRより下側の部分〕$=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sin\alpha=\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{5}$

〔領域Dのうち直線PRより上側の部分〕$=\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\beta}{2\pi}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{10}$　$\left[\because\ \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$

となるから、領域Dの面積は $\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{10}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}$（ナニヌ）