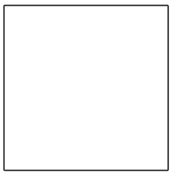
I　下の図のような正方形 ABCD の頂点を辺に沿って移動する点 P が，頂点 A の位置にある。1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出たときには点 P は時計回りに 1 つだけ隣りの頂点に移動し，他の目が出たときには点 P は反時計回りに 1 つだけ隣りの頂点に移動する。



(1)　さいころを 2 回続けて投げたとき，点 P が頂点 A の位置にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　さいころを 3 回続けて投げたとき，点 P が頂点 B の位置にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3)　さいころを n 回続けて投げたとき，点 P が頂点 C の位置にある確率を p_n とする。ただし，n は 1 以上の整数とする。n が奇数のとき，$p_n = \boxed{\text{キ}}$ である。n が偶数のとき，$n = 2k$ とすると

$$p_{2k+2} = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\,p_{2k} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であるから

$$p_{2k} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{k-1}$$

である。ただし，k は 1 以上の整数とする。

(4)　さいころを n 回続けて投げたとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を q_n とする。ただし，n は 1 以上の整数とする。$\left| q_n - \dfrac{1}{2} \right|$ の値が $\dfrac{1}{10^{10}}$ より小さくなる最小の n の値は $n = \boxed{\text{ナニ}}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) さいころを 1 回投げたとき, 時計回りに移動する事象を X, 反時計回りに移動する事象を Y とする。このとき, $P(\mathrm{X})=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P(Y)}=\dfrac{1}{3}$

さいころを 2 回続けて投げたとき, 点 P が頂点 A の位置にあるのは,

(i) 1 回目が X, 2 回目が Y

(ii) 1 回目が Y, 2 回目が X

の 2 パターンがある。

したがって, $2\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$

(2) さいころを 3 回続けて投げたとき, 点 P が頂点 B の位置にあるのは,

(i) X が 2 回, Y が 1 回

(ii) Y が 3 回

の 2 パターンがある。

したがって, $\dfrac{3!}{2!1!}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{13}{27}$

(3) n が奇数のとき, 点 P が頂点 C の位置にあることはないので, $p_n=0$

n が偶数のとき,

(i) $2k$ 回目に頂点 C にいて, $2k+2$ 回目も頂点 C にいる確率は

$$2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

(ii) $2k$ 回目に頂点 A にいて, $2k+2$ 回目に頂点 C にいる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

したがって， $$p_{2k+2}=\frac{4}{9}p_{2k}+\frac{5}{9}(1-p_{2k})$$

$$\Leftrightarrow p_{2k+2}=-\frac{1}{9}p_{2k}+\frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow p_{2k+2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\left(p_{2k}-\frac{1}{2}\right)$$

ここで, $p_2=\dfrac{5}{9}$ なので,

$$p_{2k}-\frac{1}{2}=\left(p_2-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

(4) n が偶数のとき, 点 P が頂点 D の位置にあることはないので, $q_n=0$

n が奇数のとき,

(i) $2k$ 回目に頂点 C にいて, $2k+1$ 回目に頂点 D にいる確率は $\dfrac{2}{3}$

(ii) $2k$ 回目に頂点 A にいて，$2k+1$ 回目に頂点 D にいる確率は $\dfrac{1}{3}$

したがって， $$q_{2k+1}=\frac{2}{3}p_{2k}+\frac{1}{3}(1-p_{2k})$$

$$\Leftrightarrow q_{2k+1}=\frac{1}{3}p_{2k}+\frac{1}{3}$$

(3) より， $$q_{2k+1}=\frac{1}{6}\left\{3-\left(\frac{-1}{9}\right)^k\right\}$$

$k=0$ とすると，$q_1=\dfrac{1}{3}$ となり成立する

ここで，$\left|\, q_n-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{10^{10}}$ を満たす n の最小値について

(i) $n=2k$ (k は自然数) のとき,

$$|\, q_{2k} - \frac{1}{2} \,| = |\, -\frac{1}{2} \,| > \frac{1}{10^{10}}$$ より, 不適.

(ii) $n=2k-1$ (k は自然数) のとき,

$$|\, q_{2k-1} - \frac{1}{2} \,| = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} < \frac{1}{10^{10}}$$

$$\Leftrightarrow\ 3^{-2k+1} < 2 \cdot 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow\ (-2k+1)\log_{10} 3 < -10 + \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow\ k > \frac{10 - 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{2\log_{10} 3} (= 10.665\cdots)$$

これを満たす自然数 k の最小値は 11 であり, 条件を満たす自然数 n

の最小値は 21

II　O を原点とする座標平面に 2 点 A$\left(4, -\dfrac{4}{3}\right)$，B$(m, n)$ がある。ただし，m，n は正の実数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が 45° であり，△OAB の面積が $\dfrac{40}{3}$ であるとする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ であり，$m = \boxed{キ}$，$n = \boxed{ク}$ である。

(2)　s，t を実数とし，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad 2s + 3t = 4$$

を満たしながら動くとする。このとき

$$\boxed{ケ}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

を満たす 2 点 C，D をとると，点 P の存在範囲は直線 CD であり，その方程式は

$$y = \boxed{シ}\,x - \frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$$

である。

点 A から直線 OD に垂線 AH を下ろすとき，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}, \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)$$

である。△OAH の面積を S，△OCD の面積を T とすると

$$\frac{S}{T} = \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

である。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(4,-\dfrac{4}{3}\right)$ より, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{4^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{40}{3}$ より, $\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 45^\circ=\dfrac{40}{3}$

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{40}{3}\quad\Leftrightarrow\quad|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4\sqrt{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(m,n)$ なので, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=m^2+n^2$ より,

$$m^2+n^2=80\cdots(a)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(4,-\dfrac{4}{3}\right)\cdot(m,n)=4m-\dfrac{4}{3}n$ より,

$$4m-\frac{4}{3}n=\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot4\sqrt{5}\cdot\cos 45^\circ\cdots(b)$$

$(a),(b)$ より, $m=4,\ 8$ であり, (b) に代入して, $(m,\ n)=(4,\ -8),\ (8,\ 4)$

また, $n>0$ なので $(m,\ n)=(8,\ 4)$

(2) $2s+3t=4\Leftrightarrow\dfrac{s}{2}+\dfrac{3}{4}t=1$ に注意して,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{3}{4}t(\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ として,

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

を満たす 2 点 C, D を取ると, 点 P の存在範囲は直線 CD である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(8,\ -\frac{8}{3}),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\frac{32}{3},\ \frac{16}{3})$$

2 点 C, D を通る直線は $y=3(x-8)-\dfrac{8}{3}=3x-\dfrac{80}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/(2,\ 1)$ なので，実数 k を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(2,\ 1)=(2k,\ k)$ であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(2k-4,\ k+\frac{4}{3})\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp(2,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot(2,\ 1)=0$

$$(2k-4)\cdot 2+\left(k+\frac{4}{3}\right)\cdot 1=0 \iff k=\frac{4}{3}$$

したがって，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より, $\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:2$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より, $\mathrm{OH}:\mathrm{OD}=1:4$

より，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{\triangle\mathrm{OAH}}{\triangle\mathrm{ODC}}=\dfrac{1}{8}$

III 2つの関数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x$，$g(x)=-\sin 2x$ を考える。ただし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。座標平面上の2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形を S とする。

(1) 方程式 $f(x)=g(x)$ の解は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，方程式 $f(x)=-g(x)$ の解は全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

(2) 図形 S の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $h(x)=f(x)+g(x)$ とおき，$h(x)$ の値が最大となる x の値を α，最小となる x の値を β とする。このとき，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}-\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，

$g'(\alpha)=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}+\sqrt{\boxed{\text{サシス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。また，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(4) 図形 S を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi^2+\frac{\boxed{\text{テト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\pi$$

である。

(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin x,\ g(x)=-\sin 2x$ について,

$$\begin{aligned} & f(x)=g(x) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x=-\sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x+2\sin x\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x(\sqrt{3}+2\cos x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x=0,\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より, $x=0,\ \dfrac{5\pi}{6},\ \pi$ なので, 解の個数は 3 個

同様に,

$$\begin{aligned} & f(x)=-g(x) \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x=\sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x-2\sin x\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x(\sqrt{3}-2\cos x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x=0,\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より, $x=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \pi$ なので, 解の個数は 3 個

(2) (1) より,

$$S=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}(\sqrt{3}\sin x+\sin 2x)dx-\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}(\sqrt{3}\sin x+\sin 2x)dx$$

$$= \left[-\sqrt{3}\cos x - \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{5}{6}\pi} - \left[-\sqrt{3}\cos x - \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{7}{2}$$

(3) $h(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{3}\sin x - \sin 2x$

$$h'(x) = \sqrt{3}\cos x - 2\cos 2x$$

$$= \sqrt{3}\cos x - 2(2\cos^2 x - 1)$$

$$= -4\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 2$$

$h'(x) = 0$ として，$\cos x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{35}}{8}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $\cos x$ は x について単調減少することに注意して,

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\cos x$	1	$\cdots$	$\cos\beta$	$\cdots$	$\cos\alpha$	$\cdots$	-1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	極小かつ最小	$\nearrow$	極大かつ最大	$\searrow$	0

増減表より，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{35}}{8}$

また，$g(x) = -\sin 2x$ より $g'(x) = -2\cos 2x$ なので,

$$g'(\alpha) = -2\cos 2\alpha$$

$$= -2(2\cos^2\alpha - 1)$$

$$= -4\cos^2\alpha + 2$$

$$= -4\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{35}}{8}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{105}}{8}$$

さらに，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{35}}{8} + \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{35}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(4) 回転体の体積を V とする.

$$V=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\pi\{g(x)\}^2dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\{f(x)\}^2dx\right)$$

$$-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\{g(x)\}^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\pi\{f(x)\}^2dx$$

ここで, C_1, C_2 を積分定数として,

$$\int\{f(x)\}^2dx=\int 3\sin^2 xdx=\int 3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{3}{2}x-\frac{3\sin 2x}{4}+C_1$$

$$\int\{g(x)\}^2dx=\int\sin^2 2xdx=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C_2$$

したがって,

$$V=2\pi\left(\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{3}{2}x-\frac{3\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$-\pi\left(\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)-\pi\left(\left[\frac{3\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\pi^2+\frac{15\sqrt{3}}{16}\pi$$

令和4年度　一般入試　前期A日程 ［1月29日実施問題］解答と配点

数学②「1/29」（理工学部・建築学部・薬学部・情報学部・農学部・生物理工学部・工学部・産業理工学部）

問題番号	Ⅰ																					
解答番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
正　解	4	9	1	3	2	7	0	－	1	9	5	9	1	2	1	1	8	－	1	9	2	1
配　点	4		4				4	4					4		4			4			5	

問題番号	Ⅱ																				
解答番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
正　解	4	1	0	3	4	5	8	4	2	4	3	3	8	0	3	8	3	4	3	1	8
配　点	4				4		3	3	4	4		4				4				4	

問題番号	Ⅲ																						
解答番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
正　解	3	3	7	2	3	3	5	8	－	3	1	0	5	8	3	4	3	4	1	5	3	1	6
配　点	4	4	4		5				5						5		3		3				