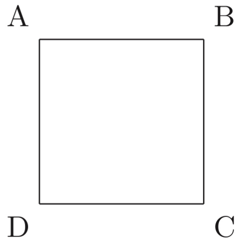
I　下の図のような正方形 ABCD の頂点を辺に沿って移動する点 P が，頂点 A の位置にある。1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出たときには点 P は時計回りに 1 つだけ隣りの頂点に移動し，他の目が出たときには点 P は反時計回りに 1 つだけ隣りの頂点に移動する。




(1)　さいころを 2 回続けて投げたとき，点 P が頂点 A の位置にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　さいころを 3 回続けて投げたとき，点 P が頂点 B の位置にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3)　さいころを $n$ 回続けて投げたとき，点 P が頂点 C の位置にある確率を $p_n$ とする。ただし，$n$ は 1 以上の整数とする。$n$ が奇数のとき，$p_n = \boxed{\text{キ}}$ である。$n$ が偶数のとき，$n = 2k$ とすると

$$p_{2k+2} = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} p_{2k} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であるから

$$p_{2k} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} \cdot \left( \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \right)^{k-1}$$

である。ただし，$k$ は 1 以上の整数とする。

(4)　さいころを $n$ 回続けて投げたとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を $q_n$ とする。ただし，$n$ は 1 以上の整数とする。$\left| q_n - \dfrac{1}{2} \right|$ の値が $\dfrac{1}{10^{10}}$ より小さくなる最小の $n$ の値は $n = \boxed{\text{ナニ}}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) さいころを 1 回投げたとき, 時計回りに移動する事象を X, 反時計回りに移動する事象を Y とする。このとき, $P(\mathrm{X})=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P(Y)}=\dfrac{1}{3}$

さいころを 2 回続けて投げたとき, 点 P が頂点 A の位置にあるのは,

(i) 1 回目が X, 2 回目が Y

(ii) 1 回目が Y, 2 回目が X

の 2 パターンがある。

したがって, $2\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$

(2) さいころを 3 回続けて投げたとき, 点 P が頂点 B の位置にあるのは,

(i) X が 2 回, Y が 1 回

(ii) Y が 3 回

の 2 パターンがある。

したがって, $\dfrac{3!}{2!1!}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{13}{27}$

(3) $n$ が奇数のとき, 点 P が頂点 C の位置にあることはないので, $p_n=0$

$n$ が偶数のとき,

(i) $2k$ 回目に頂点 C にいて, $2k+2$ 回目も頂点 C にいる確率は

$$2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

(ii) $2k$ 回目に頂点 A にいて, $2k+2$ 回目に頂点 C にいる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

したがって, $\quad p_{2k+2}=\frac{4}{9}p_{2k}+\frac{5}{9}(1-p_{2k})$

$$\Leftrightarrow p_{2k+2}=-\frac{1}{9}p_{2k}+\frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow p_{2k+2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\left(p_{2k}-\frac{1}{2}\right)$$

ここで, $p_2=\frac{5}{9}$ なので,

$$p_{2k}-\frac{1}{2}=\left(p_2-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

(4) $n$ が偶数のとき, 点 P が頂点 D の位置にあることはないので, $q_n=0$

$n$ が奇数のとき,

(i) $2k$ 回目に頂点 C にいて, $2k+1$ 回目に頂点 D にいる確率は $\frac{2}{3}$

(ii) $2k$ 回目に頂点 A にいて, $2k+1$ 回目に頂点 D にいる確率は $\frac{1}{3}$

したがって, $\quad q_{2k+1}=\frac{2}{3}p_{2k}+\frac{1}{3}(1-p_{2k})$

$$\Leftrightarrow q_{2k+1}=\frac{1}{3}p_{2k}+\frac{1}{3}$$

(3) より, $\quad q_{2k+1}=\frac{1}{6}\left\{3-\left(\frac{-1}{9}\right)^k\right\}$

$k=0$ とすると, $q_1=\frac{1}{3}$ となり成立する

ここで, $\mid q_n-\frac{1}{2}\mid<\frac{1}{10^{10}}$ を満たす $n$ の最小値について

(i) $n=2k$ ($k$ は自然数) のとき,

$$|\,q_{2k}-\frac{1}{2}\,|=|-\frac{1}{2}\,|>\ \frac{1}{10^{10}}$$ より, 不適.

(ii) $n=2k-1$ ($k$ は自然数) のとき,

$$|\,q_{2k-1}-\frac{1}{2}\,|=\ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\ <\ \frac{1}{10^{10}}$$

$$\Leftrightarrow\ 3^{-2k+1}\ <\ 2\cdot 10^{-10}$$

$$\Leftrightarrow\ (-2k+1)\log_{10}3\ <\ -10+\log_{10}2$$

$$\Leftrightarrow\ k\ >\ \frac{10-2\log_{10}2+\log_{10}3}{2\log_{10}3}(=10.665\cdots)$$

これを満たす自然数 $k$ の最小値は 11 であり, 条件を満たす自然数 $n$ の最小値は 21

II　O を原点とする座標平面に 2 点 A$\left(4, -\dfrac{4}{3}\right)$，B$(m, n)$ がある。ただし，$m$，$n$ は正の実数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が $45^\circ$ であり，$\triangle$OAB の面積が $\dfrac{40}{3}$ であるとする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ であり，$m = \boxed{\text{キ}}$，$n = \boxed{\text{ク}}$ である。

(2)　$s$，$t$ を実数とし，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad 2s + 3t = 4$$

を満たしながら動くとする。このとき

$$\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

を満たす 2 点 C，D をとると，点 P の存在範囲は直線 CD であり，その方程式は

$$y = \boxed{\text{シ}}\,x - \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

点 A から直線 OD に垂線 AH を下ろすとき，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}, \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

である。$\triangle$OAH の面積を $S$，$\triangle$OCD の面積を $T$ とすると

$$\frac{S}{T} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(4,-\frac{4}{3}\right)$ より, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{4^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{40}{3}$ より, $\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 45^\circ=\frac{40}{3}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{40}{3}\quad\Leftrightarrow\quad|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4\sqrt{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(m,n)$ なので, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=m^2+n^2$ より,

$$m^2+n^2=80\cdots(a)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(4,-\frac{4}{3}\right)\cdot(m,n)=4m-\frac{4}{3}n$ より,

$$4m-\frac{4}{3}n=\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\cos 45^\circ\cdots(b)$$

$(a),(b)$ より, $m=4,\ 8$ であり, $(b)$ に代入して, $(m,\ n)=(4,\ -8),\ (8,\ 4)$

また, $n>0$ なので $(m,\ n)=(8,\ 4)$

(2) $2s+3t=4\Leftrightarrow\frac{s}{2}+\frac{3}{4}t=1$ に注意して,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3}{4}t(\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ として,

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

を満たす 2 点 C, D を取ると, 点 P の存在範囲は直線 CD である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(8,\ -\frac{8}{3}),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\frac{32}{3},\ \frac{16}{3})$$

2 点 C, D を通る直線は $y=3(x-8)-\frac{8}{3}=3x-\frac{80}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/(2,\ 1)$ なので，実数 $k$ を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(2,\ 1)=(2k,\ k)$ であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(2k-4,\ k+\frac{4}{3})\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp(2,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot(2,\ 1)=0$

$$(2k-4)\cdot 2+\left(k+\frac{4}{3}\right)\cdot 1=0 \iff k=\frac{4}{3}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{8}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より, $\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:2$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より, $\mathrm{OH}:\mathrm{OD}=1:4$

より，$\frac{S}{T}=\frac{\triangle\mathrm{OAH}}{\triangle\mathrm{ODC}}=\frac{1}{8}$

**III** 座標平面上の点 $(2,1)$ を通り，傾きが $a$，$y$ 切片が $b$ の直線を $\ell$ とする。直線 $\ell$ と放物線

$$C\colon y=\frac{1}{2}x^2-nx$$

で囲まれた図形 $S$ を考える。ただし，$a$，$b$ は実数とし，$n$ は正の整数とする。

(1) $b$ を $a$ を用いて表すと，$b=\boxed{\text{アイ}}\,a+\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $n=2$，$a=0$ とする。このとき，放物線 $C$ と直線 $\ell$ の共有点の $x$ 座標は，値の小さい順に $\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) $n=1$ とする。図形 $S$ の面積は $a=\boxed{\text{ク}}$，$b=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき最小となり，このときの面積は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4) $a=1$ とする。放物線 $C$ と直線 $\ell$ の共有点の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta$ $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha$ より大きい整数のうち最小のものは $\boxed{\text{セ}}$ であり，$\beta$ より小さい整数のうち最大のものは $\boxed{\text{ソ}}\,n+\boxed{\text{タ}}$ である。図形 $S$ の内部および境界線上の点のうち，$x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点の個数を $L$ とする。$n=1$ のとき $L=\boxed{\text{チ}}$ であり，$n=2$ のとき $L=\boxed{\text{ツテ}}$ である。$L$ を $n$ を用いて表すと

$$L=\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}n^3+\boxed{\text{ニ}}\,n^2+\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}n$$

である。

(1) 直線 $l: y = ax + b$ は $(2,\ 1)$ を通るので,

$$1 = 2a + b \ \Leftrightarrow \ b = -2a + 1$$

(2) $n = 2, a = 0$ のとき, (1) より $b = 1$ となるので,

$$C: y = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad l: y = 1$$

2 式を連立して, $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}$$

(3) $n = 1$ のとき.

$$C: y = \frac{1}{2}x^2 - x, \quad l: y = ax - 2a + 1$$

2 式を連立して, $\dfrac{1}{2}x^2 - x = ax - 2a + 1$

式を整理すると, $x^2 - 2(a+1)x + 2(2a-1) = 0 \cdots (a)$

判別式を $D$ として, $\dfrac{D}{4} = (a+1)^2 - 2(2a-1)$

$$= a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 > 0$$

方程式 $(a)$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とする.

図形 $S$ の面積は, $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \left\{(ax - 2a + 1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\right\}dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left\{2\sqrt{(a-1)^2+2}\right\}^3$$

したがって，$S$ が最小値をとるのは，$a=1$ のときであり，

また, (1) より　$b=-1$,　$S$ の最小値は，$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

(4) $a=1$ のとき, (1) より, $b=-2a+1=-1$ であり,

$$C: y=\frac{1}{2}x^2-nx,\quad l: y=x-1$$

2 式を連立して，$\dfrac{1}{2}x^2-nx=x-1$

$$\Leftrightarrow x^2-2(n+1)x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=n+1\pm\sqrt{(n+1)^2-2}$$

ここで，$\sqrt{n^2} < \sqrt{(n+1)^2-2} < \sqrt{(n+1)^2}$

なので，$0<n+1-\sqrt{(n+1)^2-2}<1$ となり，$0<\alpha<1$

したがって，$\alpha$ より大きい最小の整数は $1$

また，$2n+1<n+1+\sqrt{(n+1)^2-2}<2n+2$ となり，$2n+1<\beta<2n+2$

したがって，$\beta$ より小さい最大の整数は $2n+1$

$$C: y=\frac{1}{2}x^2-nx,\quad l: y=x-1 \text{ において,}$$

(i)　$x=2k-1$ $(k=1,2,\cdots n+1)$ とする。

このとき，　$y=(2k-1)-1=2k-2$

$$y=\frac{1}{2}(2k-1)^2-n(2k-1)=2k^2-2(n+1)k+n+\frac{1}{2}$$

直線 $x=2k-1$ $(k=1,2,\cdots n+1)$ 上の格子点は,

$$(2k-2)-\left\{2k^2-2(n+1)k+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\}+1$$

$$=-2k^2+2(n+2)k-n-2(\text{個})$$

(ii) $x=2k\ (k=1,2,\cdots n)$ とする。

このとき, $y=(2k)-1=2k-1$

$$y=\frac{1}{2}(2k)^2-n(2k)=2k^2-2nk$$

直線 $x=2k\ (k=1,2,\cdots n+1)$ 上の格子点は,

$$(2k-1)-(2k^2-2nk)+1$$

$$=-2k^2+2(n+1)k(\text{個})$$

(i), (ii) より, 求める格子点の個数は,

$$L=\sum_{k=1}^{n+1}\{-2k^2+2(n+2)k-n-2\}+\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+2(n+1)k\}$$

$$=\frac{2}{3}n^3+2n^2+\frac{4}{3}n$$

これより, $n=1$ のとき, $L=4$

$n=2$ のとき, $L=16$

# 令和4年度　一般入試　前期A日程　[1月29日実施問題]解答と配点

数学①「1/29」(理工学部[理/化学・生命科]・建築学部・薬学部・農学部・生物理工学部・工学部・産業理工学部)

| 問題番号 | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 解答番号 | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ |
| 正　解 | 4 | 9 | 1 | 3 | 2 | 7 | 0 | － | 1 | 9 | 5 | 9 | 1 | 2 | 1 | 1 | 8 | － | 1 | 9 | 2 | 1 |
| 配　点 | 4 | | 4 | | | | 4 | 4 | | | | | 4 | | 4 | | | 4 | | | 5 | |

| 問題番号 | II | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 解答番号 | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ |
| 正　解 | 4 | 1 | 0 | 3 | 4 | 5 | 8 | 4 | 2 | 4 | 3 | 3 | 8 | 0 | 3 | 8 | 3 | 4 | 3 | 1 | 8 |
| 配　点 | 4 | | | | 4 | | 3 | 3 | 4 | 4 | | 4 | | | | 4 | | | | 4 | |

| 問題番号 | III | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 解答番号 | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ |
| 正　解 | － | 2 | 1 | 2 | 6 | 2 | 6 | 1 | － | 1 | 4 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 6 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3 |
| 配　点 | 4 | | | 4 | | 4 | | 4 | 4 | | 2 | | | 2 | 2 | | 2 | 2 | | 3 | | | | |